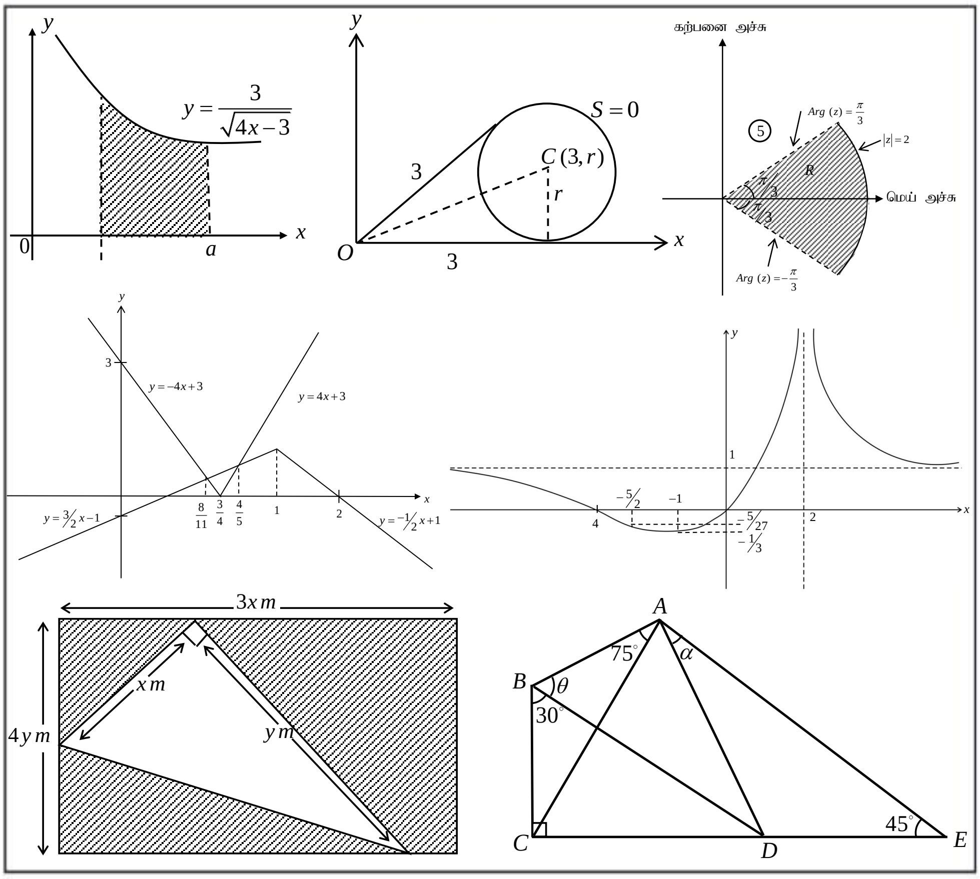
மொறட்டுவைப் பல்கலைக்கழக பொறியியற் பீட தமிழ் மாணவர்கள்
நடாத்தும் க.பொ.த உயர்தர மாணவர்களுக்கான $14^{\text{வது}}$

முன்னோடிப் பரீட்சை 2023

10(I) - இணைந்தகணிதம் I

விடைகள் (புள்ளியிடும் திட்டம்)



Prepared By
B.Raveendran *B.Sc.*

Mora E-fac Tamil Students 2023 | Examination Committee

பகுதி *A*

1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n} 5\left(3^{r-1}\right) = \frac{5}{2}\left(3^n - 1\right)$ என நிறுவுக.

$n=1$ ஆக, $L.H.S = 5,\ R.H.S = 5$ ⑤

$\therefore\ n=1$ இற்கு முடிவு உண்மை

$n = p\left(\in \mathbb{Z}^+\right)$ இற்கு முடிவு உண்மை என்க

அதாவது $\sum_{r=1}^{p} 5(3^{r-1}) = \frac{5}{2}(3^p - 1)$ ⑤

$n = p+1$ ஆக

$$\sum_{r=1}^{p+1} 5(3^{r-1}) = \sum_{r=1}^{p} 5(3^{r-1}) + 5(3^p)$$

$$= \frac{5}{2}(3^p - 1) + 5(3^p) \quad ⑤$$

$$= \frac{15}{2}\,3^p - \frac{5}{2}$$

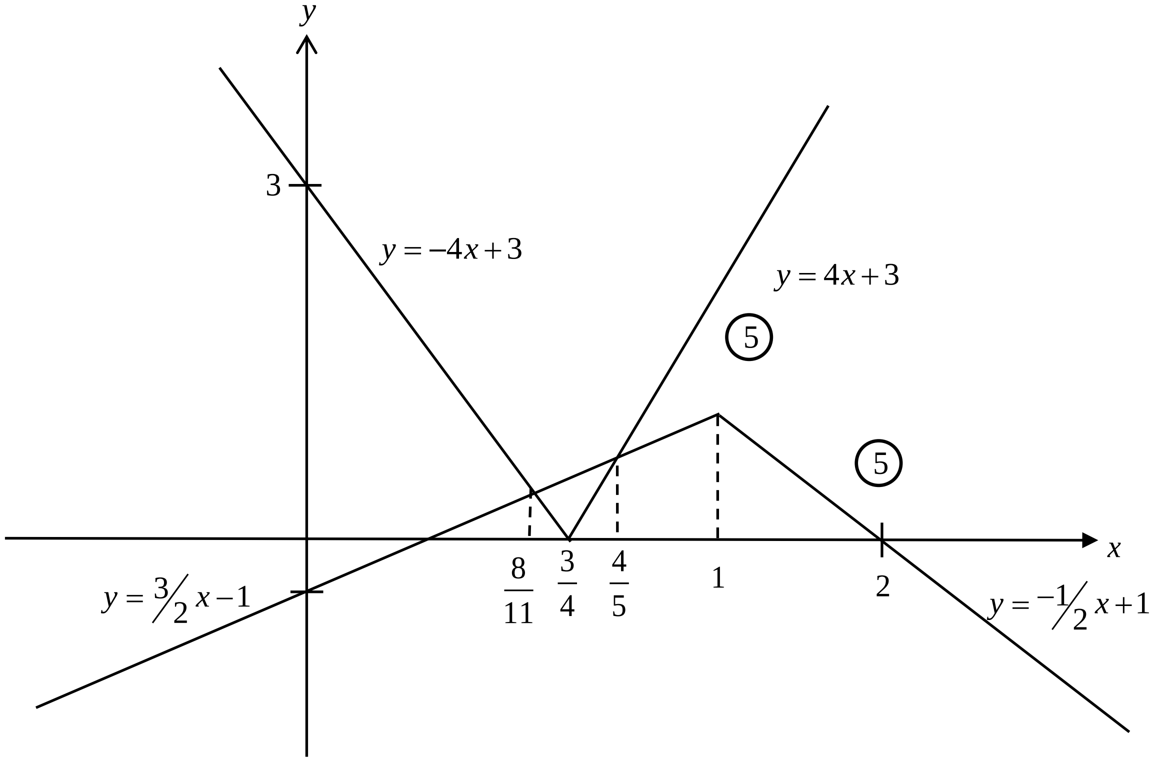
$$= \frac{5}{2}(3^{p+1} - 1) \quad ⑤$$

$n = p$ இற்கு முடிவு உண்மை எனின் $n = p+1$ இற்கு முடிவு உண்மை ஆகும். ஆனால் $n=1$ இற்கு முடிவு உண்மை. $\therefore$ கணிதத்தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டின்மூலம் $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு முடிவு உண்மையாகும். ⑤

$\boxed{25}$

2. ஒரே வரிப்படத்தில் $y=\frac{1}{2}x-|x-1|$, $y=|4x-3|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக சமனிலி $\frac{x-2|x-2|}{|2x-3|}\geq 4$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களையும் காண்க.



ஒரு வெட்டுப்புள்ளியின் $x-$ ஆள்கூறு $x<\frac{4}{3}$ இற்கு $-(4x-3)=\frac{1}{2}x+(x-1)$ இனால் தரப்படும்.

இதிலிருந்து $x=\frac{8}{11}$

மற்றைய வெட்டுப்புள்ளியின் $x-$ ஆள்கூறு $\frac{4}{3}<x<1$ இற்கு $4x-3=\frac{1}{2}x+(x-1)$ இனால் தரப்படும். ⑤

இதிலிருந்து $x=\frac{4}{5}$

$t=\frac{x}{2}$ என்க. ⑤

தரப்பட்ட சமனிலி $\frac{2t-2|2t-2|}{|4t-3|}\geq 4$ என ஆகும்.

இது இற்கு $\frac{1}{2}t-|t-1|\geq|4t-3|$ சமனாகும்.

வரைபிலிருந்து

$\frac{8}{11}\leq t\leq\frac{4}{5}$ ⑤

$\frac{16}{11}\leq x\leq\frac{8}{5}$

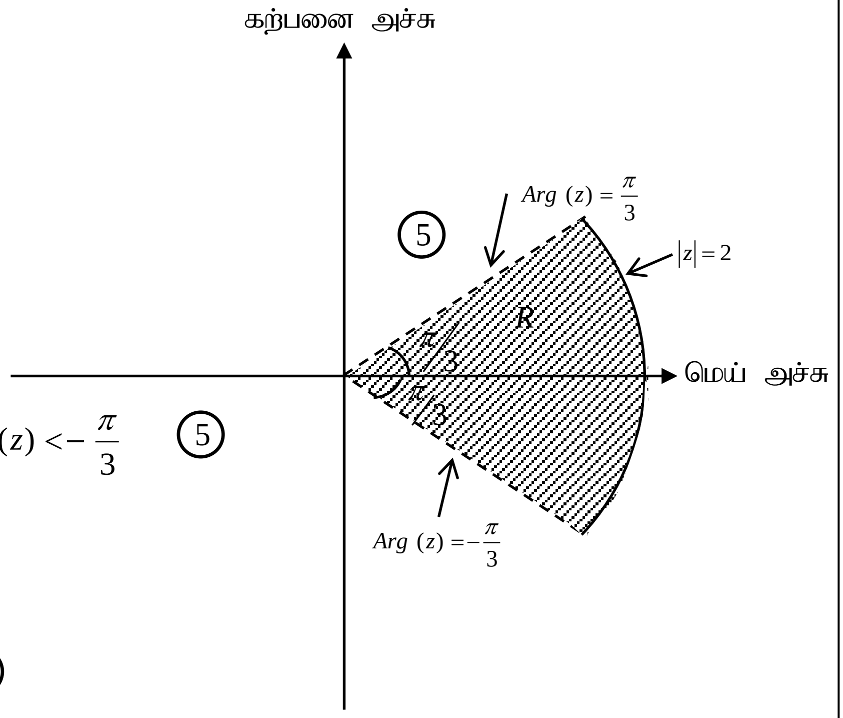
25

3. ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் $-\pi < Arg\left(\frac{-\left(\sqrt{3}\,i+1\right)}{2z}\right) < -\frac{\pi}{3},\ |z| \le 2$ என்னும் நிபந்தனைகளைத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் பிரதேசம் R ஐ நிழற்றுக. பிரதேசம் R இல் $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ ஆனது இருப்பதில்லை எனக்காட்டுக.

$\omega = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\,i}{2}$ என்க.

$$= \cos\left(-{}^{2\pi}\!/_{3}\right) + i\,\sin\left(-{}^{2\pi}\!/_{3}\right)$$

$$Arg\ (\omega) = -{}^{2\pi}\!/_{3} \qquad ⑤$$



$$-\pi < Arg\left(\frac{-\left(\sqrt{3}\,i+1\right)}{2z}\right) < -\frac{\pi}{3}$$

$$-\pi < Arg\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right) - Arg\ (z) < -\frac{\pi}{3} \qquad ⑤$$

$$-\pi < -\frac{2\pi}{3} - Arg\ (z) < -\frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{3} < Arg\ (z) < \frac{\pi}{3} \qquad ⑤$$

$z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ என்க.

$$=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$|z_1| = 3,\ \ Arg\,(z_1) = -\frac{\pi}{6}$$

$$|z_1| > 2 \qquad ⑤$$

ஆகவே குறித்த சிக்கலெண் பிரதேசம் R இல் இருப்பதில்லை.

$$\boxed{25}$$

பக். 4 ஐப் பார்க்க

4. $\left(3x^3+\frac{6}{x^2}\right)^5$, $\left(x^2+\frac{9a}{x^2}\right)^4$ எனும் ஈருறுப்பு விரிவுகளில் x ஐச் சாராத உறுப்புக்கள் முறையே p,q ஆகும். 20×3^5, p,q ஆகியன ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் அடுத்துள்ள மூன்று உறுப்புக்கள் ஆகவும் $a>0$ ஆகவும் இருப்பின் $a=\sqrt{70}$ எனக் காட்டுக.

$\left(3x^3+\frac{6}{x^2}\right)^5$ இன் விரிவில்

$$T_{r+1}={}^5C_r\left(3x^3\right)^{5-r}\left(\frac{6}{x^2}\right)^r$$

$x^0:-\quad 15-5r=0$ ⑤

$r=3$

$p={}^5C_3\cdot3^2\cdot6^3=80\times3^5$ ⑤

$\left(x^2+\frac{9a}{x^2}\right)^4$ இன் விரிவில்

$$T_{r+1}={}^4C_r\left(x^2\right)^{4-r}\left(\frac{9a}{x^2}\right)^r$$

$x^0:-\quad 8-4r=0$ ⑤

$r=2$

$q={}^4C_2\ (9a)^2=2a^2\times3^5$ ⑤

$p-20\times3^5=q-p$

$80\times3^5-20\times3^5=2a^2\times3^5-80\times3^5$

$140=2a^2$

$a^2=70$ ⑤

$a=\sqrt{70}\qquad(a>0)$

25

பக். 5 ஐப் பார்க்க

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\sin^2 2x+x^2}=0$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\sin^2 2x+x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-(1-x^2)}{\left(\cos x+\sqrt{1-x^2}\right)}\overset{⑤}{\cdot}\frac{1}{(\sin^2 2x+x^2)}$$

$$\overset{⑤}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{\sin^2 2x+x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x+\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}{\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}+1}\cdot\frac{1}{2}$$

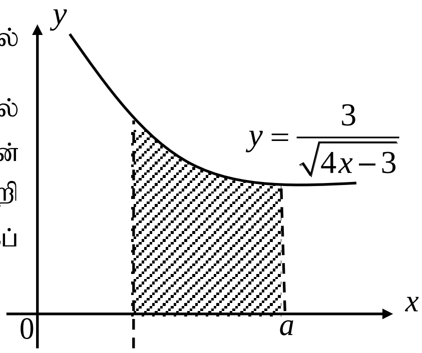
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}{4\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^2+1}\quad ⑤$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-1)}{4\cdot 1^2+1}\qquad ⑤+⑤$$

$$=0$$

$\boxed{25}$

6. $y=\dfrac{3}{\sqrt{4x-3}},\ x=1,\ x=a,\ y=0$ ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடக்கப்படும் பிரதேசத்தின் பரப்பளவு அருகிலுள்ள உருவில் நிழற்றிக் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதன் பரப்பளவு 3 சதுர அலகுகள் எனின் a இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, நிழற்றிய பிரதேசம் $x-$ அச்சைப்பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\dfrac{9\pi}{4}\ln 9$ எனக் காட்டுக.



பரப்பு $= \displaystyle\int_1^a \frac{3}{\sqrt{4x-3}}\,dx = 3$ ⑤

$$3\int_1^a (4x-3)^{-1/2}\,dx = 3$$

$$\left.\frac{(4x-3)^{1/2}}{1/2\times 4}\right|_1^a = 1 \quad ⑤$$

$$\sqrt{4a-3}-1=2$$

$$a=3 \quad ⑤$$

கனவளவு $= \displaystyle\int_1^3 \pi\left(\frac{3}{\sqrt{4x-3}}\right)^2 dx$ ⑤

$$=9\pi\left.\frac{\ln|4x-3|}{4}\right|_1^3$$

$$=\frac{9\pi}{4}\left[\ln 9-0\right]$$

$$=\frac{9\pi}{4}\ln 9 \quad ⑤$$

$\boxed{25}$

7. $(x+y)\,(x-y)=a^2$ எனும் வளையியில் $P\equiv(a\cos ec\theta,\ a\cot\theta)$ எனும் புள்ளி உண்டு எனக்காட்டுக. அத்துடன் P யில் வரையப்பட்ட செவ்வனானது $x+2y-1=0$ எனும் கோட்டிற்கு சமாந்தரம் எனின் θ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. இங்கு $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ஆகும்.

$$x^2-y^2=a^2$$

$$(a\cos ec\theta,\ a\cot\theta)\Rightarrow$$

$$a^2\cos ec^2\theta-a^2\cot^2\theta=a^2$$

$$a^2(1)=a^2 \quad ⑤$$

$\therefore$ $(a\cos ec\theta,\ a\cot\theta)$ எனும் புள்ளி தரப்பட்ட வளையியில் உண்டு.

$$2x-2y\,\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y} \quad ⑤$$

P யில் வரையப்பட்ட தொடலியின் படித்திறன் $=\dfrac{a\cos ec\theta}{a\cot\theta}$ ⑤

$$=\sec\theta$$

P யில் வரையப்பட்ட செவ்வனின் படித்திறன் $=-\cos\theta$ ⑤

$$-\cos\theta=-\frac{1}{2}$$

$$\theta=\frac{\pi}{3} \quad ⑤$$

$$\boxed{25}$$

8. $ax+2by+3b=0,\ bx-2ay-3a=0$ எனும் இரு நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியினூடும், $x-$அச்சிற்கு சமாந்தரமாகவும் செல்லும் நேர்கோடானது $y-$அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூற்றைக் காண்க. இங்கு $a,b\neq 0.$

$l_1,\, l_2$ இடைவெட்டும் புள்ளியினூடு செல்லும் எல்லா நேர்கோடுகளினதும் சமன்பாடுகள்

$l_1 + \lambda l_2 = 0$

$ax+2by+3b + \lambda(bx-2ay-3a)=0$

$(a+\lambda b)x+(2b-2a\lambda)y+3b-3a\lambda=0$ ⑤

x அச்சிற்கு சமாந்தரமாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் படித்திறன் $=0$

$-\dfrac{(a+\lambda b)}{(2b-2a\lambda)}=0$ ⑤

$\lambda = {-a}/{b}$ ⑤

தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$ax+2by+3b+\left({-a}/{b}\right)(bx-2ay-3a)=0$

y அச்சை வெட்டும் புள்ளியில் $x=0$ ⑤

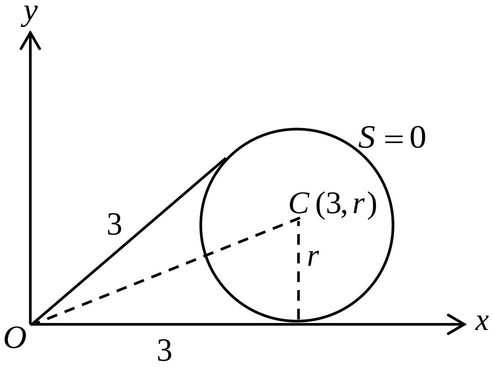
$2by+3b-\dfrac{a}{b}(-2ay-3a)=0$

$y=-{3}/{2}$

வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறு $\equiv \left(0,\, -{3}/{2}\right)$ ⑤

25

9. முதலாம் கால்வட்டத்தில் அமையும் r ஆரையுடைய வட்டம் S ஆனது நேர் $x-$ அச்சை தொடுகின்றது. உற்பத்தியிலிருந்து வட்டம் S இற்கு வரையப்படும் தொடலியின் நீளம் 3 அலகு ஆகும். $A\equiv(5,3)$ எனும் புள்ளியானது வட்டம் S இற்கு வெளியே இருப்பின் $r<\dfrac{13}{6}$ எனக்காட்டுக. உற்பத்தியிலிருந்து S இன் மையத்திற்கான தூரம் $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ எனின் S இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.



A யானது விட்டம் S இற்கு வெளியே இருப்பின் $CA>r$ ⑤

$CA^2>r^2$

$(5-3)^2+(3-r)^2>r^2$

$13-6r>0$ ⑤

$r<{}^{13}/_{6}$

$\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2=3^2+r^2$ ⑤

$\dfrac{9}{4}=r^2$

$r={}^{3}/_{2}\quad(\therefore r>0)$ ⑤

மையம் $C\equiv\left(3,\ {}^{3}/_{2}\right)$

$S\equiv(x-3)^2+\left(y-{}^{3}/_{2}\right)^2=\left({}^{3}/_{2}\right)^2$

$\equiv x^2+y^2-6x-3y+9=0$ ⑤

25

10. $k \in \mathbb{R},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ ஆக $x=(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1),\ y=\cos ec\theta$ எனக்கொள்க. $x=ky$ எனின் $0 \le k \le 1$ எனக்காட்டி $k=\frac{1}{2}$ ஆக $\theta=\frac{\pi}{18}$ எனக் காட்டுக.

$$x=(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$$

$$x=4\cos^2\theta-1$$

⑤

$$y=\cos ec\theta = {}^{1}\!/_{\sin\theta}$$

$$x=ky$$

$$4\cos^2\theta-1=\frac{k}{\sin\theta}$$

$$4\sin\theta\ (1-\sin^2\theta)-\sin\theta=k$$ ⑤

$$3\sin\theta-4\sin^3\theta=k$$

$$k=\sin 3\theta$$ ⑤

$$0\le\theta\le{}^{\pi}\!/_{6}$$

$$0\le 3\theta\le{}^{\pi}\!/_{2}$$

$$0\le\sin 3\theta\le 1$$ ⑤

$$0\le k\le 1$$

$$k=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin 3\theta={}^{1}\!/_{2}$$

$$3\theta={}^{\pi}\!/_{6}$$ ⑤

$$\theta={}^{\pi}\!/_{18}$$

25

பக். 11 ஐப் பார்க்க

பகுதி *B*

11. (*a*) $|k|>1$ இற்கு, $\alpha,\ \beta(<\alpha)$ ஐ மூலங்களாகவுடைய சமன்பாடு $f(x)=kx^2+2k(k-2)x+1=0$ எனவும், $\gamma,\delta\ (<\gamma)$ ஐ மூலங்களாகவுடைய சமன்பாடு $g(x)=x^2+2kx+k=0$ எனவும் கொள்வோம். $\alpha,\ \beta$ இரண்டும் நேர் எனத் தரப்பட்டுள்ளது. k இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க. மேலும் $\gamma,\ \delta$ இரண்டும் மெய்யானவை எனவும் மறையானவை எனவும் காட்டுக.

அத்துடன் $\gamma-\delta=2\sqrt{k\left(k-1\right)}$ எனவும் காட்டுக.

$p=\alpha\gamma-\beta\delta$ எனவும் $q=\beta\gamma-\alpha\delta$ எனவும் கொள்க. $pq,\ p+q$ ஆகியவற்றை k இன் சார்பில் காண்க. அத்துடன் $\beta\gamma>\alpha\delta$ எனவும் $\alpha\gamma>\beta\delta$ எனவும் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $|\alpha\gamma-\beta\delta|,|\beta\gamma-\alpha\delta|$ இனை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $x^2-4(2-k)\sqrt{k(k-1)}\,x-4k(k-1)(k-3)=0$ எனக் காட்டுக.

(*b*) $f(x)=4ax^3+10bx^2+cx+15$ எனவும் $g(x)=ax^2-5x+b$ எனவும் கொள்வோம். இங்கு $a,c\in\mathbb{Z}^+$ உம் $b\in\mathbb{Z}^-$ ஆகும். $g(x)$ என்பது $f(x)$ இன் காரணி எனவும் $g'(x)$ இனை $(x-1)$ இனால் வகுக்க வரும் மீதி (-1) எனவும் தரப்படின் a,b,c இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. a,b,c இன் இப் பெறுமானங்களிற்கு $f'(x)+g'(x)+4x$ இனை முற்றாகக் காரணிப்படுத்துக.

(இங்கு $f'(x),\ g'(x)$ ஆனது x குறித்து முறையே $f(x),\ g(x)$ இன் பெறுதிகளாகும்.)

(*a*)

$f(x)=kx^2+2k(k-2)x+1=0$

$\alpha+\beta=2(2-k)$

$\alpha\beta=1/k$ ⑤

$2(2-k)>0$ $\qquad$ $1/k>0$

$k<2$ ⑤ $\qquad$ $k>0$

$0<k<2,\quad |k|>1$

$\therefore\ 1<k<2$ ⑤

$\boxed{15}$

$g(x)=x^2+2kx+k=0$

$\gamma+\delta=-2k<0$ $\quad(\because k>1)$

$\gamma\delta=k>0$ $\quad(\because k>1)$ ⑤

$\therefore\ \gamma,\delta$ இரண்டும் மறையானவை.

$\Delta=4k^2-4\times1\times k$ ⑤

$=4k(k-1)>0$ ⑤ $(\because k>1)$

γ, δ இரண்டும் மெய்யானவை 15

$\gamma-\delta=\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta}$ ⑤ $(\because \gamma>\delta)$

$=\sqrt{4k^2-4k}$

$=2\sqrt{k(k-1)}$

$pq=(\alpha\gamma-\beta\delta)\,(\beta\gamma-\alpha\delta)$

$=\alpha\beta(\gamma^2+\delta^2)-\gamma\delta\,(\alpha^2+\beta^2)$

$=\alpha\beta\left[(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\right]-\gamma\delta\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]$ ⑤

$=\frac{1}{k}\left[4k^2-2k\right]-k\left[4(2-k)^2-2\times\frac{1}{k}\right]$ ⑤

$=4k-2-4k(2-k)^2+2$

$=-4k(k-1)(k-3) \quad >0$ $(\because 1<k<2)$ ⑤ 20

$\alpha>\beta$

$-\delta>-\gamma$

$-\alpha\delta>-\beta\gamma \quad \Rightarrow \quad \beta\gamma-\alpha\delta>0$

ஆனால் $(\alpha\gamma-\beta\delta)\,(\beta\gamma-\alpha\delta)>0$ ⑤

$\therefore \ \alpha\gamma-\beta\delta>0$

$\alpha\gamma>\beta\delta$

$p+q=\gamma(\alpha+\beta)-\delta(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)\,(\gamma-\delta)$ ⑤

$=2(2-k)\times 2\sqrt{k(k-1)}$

$=4(2-k)\,\sqrt{k(k-1)}$ ⑤ 15

$|\alpha\gamma-\beta\delta|=\alpha\gamma-\beta\delta$ ⑤ $|\beta\gamma-\alpha\delta|=\beta\gamma-\alpha\delta$

$|\alpha\gamma-\beta\delta|, |\beta\gamma-\alpha\delta|$ ஐ மூலங்களாகவுடைய இருபடிச்சமன்பாடு

$\left(x-|\alpha\gamma-\beta\delta|\right)\left(x-|\beta\gamma-\alpha\delta|\right)=0$ ⑤

$x^2-\left(|\alpha\gamma-\beta\delta|+|\beta\gamma-\alpha\delta|\right)x+|\alpha\gamma-\beta\delta||\beta\gamma-\alpha\delta|=0$ ⑤

$x^2-4(2-k)\,\sqrt{k(k-1)}\,x-4k(k-1)\,(k-3)=0$ ⑤ 20

பக். 13 ஐப் பார்க்க

(*b*)

$g'(x) = 2ax - 5$ ⑤

$g'(1) = -1$ ⑤

$x = 1 \Rightarrow 2a \times 1 - 5 = -1$

$a = 2$ ⑤ $\boxed{15}$

$f(x) = 8x^3 + 10bx^2 + cx + 15$

$g(x) = 2x^2 - 5x + b$

$f(x) = g(x)\ \emptyset\ (x)$

$8x^3 + 10bx^2 + cx + 15 = (2x^2 - 5x + b)\ (px + q)$ ⑤

$x^3 :-\ 2p = 8 \Rightarrow p = 4$

$x^2 :-\ 10b = -5p + 2q \Rightarrow q - 5b = 10$ ______① ⑤ + ⑤

$x^o :-\ 15 = bq$

① $\Rightarrow {}^{15}\!/_{b} - 5b = 10$

$(b+3)\ (b-1) = 0$

$b = -3$ ⑤ $(\therefore b \in \mathbb{Z}^-)$

$x :-\ c = bp - 5q \Rightarrow c = 13,\ q = -5$ ⑤ + ⑤ $\boxed{30}$

$f'(x) = 24x^2 - 60x + 13,\quad g'(x) = 4x - 5$ ⑤

$f'(x) + g'(x) + 4x$

$= 24x^2 - 52x + 8$ ⑤

$= 4\ (6x^2 - 13x + 2)$

$= 4\ (6x - 1)\ (x - 2)$

⑤ ⑤ $\boxed{20}$

பக். 14 ஐப் பார்க்க

12. (a) ஒவ்வொருவருக்கும் குறைந்தபட்சம் ஒரு பேனையேனும் கிடைக்கத்தக்கதாக நான்கு நீலநிறப் பேனைகளும், ஆறு கறுப்புநிறப் பேனைகளும், மூன்று சிவப்புநிறப் பேனைகளும் ஆறு மாணவர்களிடையேயும் நான்கு ஆசிரியர்களிடையேயும் பகிர்ந்துகொள்ள வேண்டியுள்ளது.

(i) ஏழு பேருக்கு ஒரு பேனை வீதமும் எஞ்சிய மூவரில் ஒருவருக்கு இரு நீலநிறப் பேனைகளும் மற்றொருவருக்கு இரு கறுப்புநிறப் பேனைகளும் எஞ்சியவருக்கு இரு சிவப்புநிற பேனைகளும்

(ii) ஒரு ஆசிரியருக்கு மூன்று சிவப்புநிறப் பேனைகளும் ஒரு மாணவருக்கு ஏதாவது இரு பேனைகளும், எஞ்சிய எட்டுப் பேருக்கு ஒவ்வொரு பேனை வீதமும்

(iii) ஒரு ஆசிரியருக்கு ஒரே நிற இரு பேனைகளும், குறித்த ஆசிரியர் பெற்ற நிறப் பேனை மாணவர்கள் பெறாதவண்ணம், மாணவர் ஒருவருக்கு இரு பேனைகள் வீதம் இரு மாணவர்களுக்கு ஒரே நிற நான்கு பேனைகளும், எஞ்சிய ஏழு பேருக்கு ஒவ்வொரு பேனை வீதமும்

கிடைக்கும் வெவ்வேறு விதங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{3r^2 - r - 3}{3(r+1)!}$ எனக் கொள்வோம்

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{A}{(r+1)!} + \dfrac{B}{r!} + \dfrac{C}{(r-1)!}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C ஆகிய மெய்ம்மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைத் துணிக. **இதிலிருந்து,** $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\dfrac{1}{3^{r-1}} U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ ஐக் கண்டு, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{3^{r-1}} U_r = -\frac{n}{3^n (n+1)!}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{3^{r-1}} U_r$ ஒருங்குகின்றதென உய்த்தறிந்து, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$V_r = \left(\dfrac{1}{3^r}\ U_{r+1}\right) + k\left(\dfrac{1}{3^{r-2}}\ U_{r-1}\right)$ எனக் கொள்க.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} V_r = \frac{1}{12}$ ஆக இருக்கத்தக்க மெய்ம் மாறிலி k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(a) (i)

இரு நீல நிறப்பேனைகள் கிடைக்குமாறு ஒருவரைத் தெரிதல் $= 10C_1 = 10$

இரு கறுப்பு நிறப்பேனைகள் கிடைக்குமாறு ஒருவரைத் தெரிதல் $= 9C_1 = 9$

இரு சிவப்பு நிறப்பேனைகள் கிடைக்குமாறு ஒருவரைத் தெரிதல் $= 8C_1 = 8$ ⑤+⑤

எஞ்சிய 7 பேருக்கு 7 பேனைகள் பகிர்தல் $= \dfrac{7!}{2!\,4!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{2}$ ⑤

$= 105$

தேவையான வழிகள் $= 10 \times 9 \times 8 \times 105$

$= 75600$ ⑤

$\boxed{20}$

(ii) ஆசிரியர் மூன்று சிவப்பு நிறப் பேனைகளைப் பெறுதல் $= 4C_1$

மாணவர் ஒருவருக்கு ஏதாவது இரு பேனைகள் கிடைத்து எஞ்சியவருக்கு ஒவ்வொரு பேனை வீதம் கிடைத்தல்.

பக். 15 ஐப் பார்க்க

இரு நீல நிறம்	$\frac{8!}{2!\,6!} \times 6C_1$	28×6	⑤
இரு கறுப்பு நிறம்	$\frac{8!}{4!\,4!} \times 6C_1$	70×6	⑤
நீலம், கறுப்பு	$\frac{8!}{3!\,5!} \times 6C_1$	56×6	⑤

தேவையான வழிகள் $= 4C_1 \times 6C_1 \times 154$

$= 3696$ ⑤ $\boxed{20}$

(iii)

ஆசிரியர்	மாணவர்	தேவையான வழிகள்	
2 சிவப்பு	4 நீலம்	$4C_1 \times 6C_2 \times {}^{7!}\!/_{6!} = 4 \times 15 \times 7 = 420$	⑤
2 சிவப்பு	4 கறுப்பு	$4C_1 \times 6C_2 \times {}^{7!}\!/_{2!\,4!} = 4 \times 15 \times 105 = 6300$	⑤
2 நீலம்	4 கறுப்பு	$4C_1 \times 6C_2 \times {}^{7!}\!/_{3!\,2!\,2!} = 4 \times 15 \times 210 = 12600$	⑤
2 கறுப்பு	4 நீலம்	$4C_1 \times 6C_2 \times {}^{7!}\!/_{3!\,4!} = 4 \times 15 \times 35 = 2100$	⑤

தேவையான வழிகள் $= 420 + 6300 + 12600 + 2100$

$= 21420$ ⑤ $\boxed{25}$

(b)

$$U_r = \frac{A}{(r+1)!} + \frac{B}{r!} + \frac{C}{(r-1)!}$$

$$\frac{3r^2 - r - 3}{3(r+1)!} = \frac{3\left[A + B(r+1) + Cr(r+1)\right]}{3(r+1)!}$$ ⑤

$r^2 :- \quad 3 = 3C \Rightarrow C = 1$

$r :- \quad -1 = 3(B+C) \Rightarrow B = -{}^{4}\!/_{3}$ ⑤ + ⑤

$r^o :- \quad -3 = 3(A+B) \Rightarrow A = {}^{1}\!/_{3}$ $\boxed{15}$

$$U_r = \frac{1}{3(r+1)!} - \frac{4}{3r!} + \frac{1}{(r-1)!}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(r+1)!} - \frac{1}{r!}\right] - \left[\frac{1}{r!} - \frac{1}{(r-1)!}\right]$$ ⑤

$$\frac{1}{3^{r-1}}U_r=\frac{1}{3^r}\left(\frac{1}{(r+1)!}-\frac{1}{r!}\right)-\frac{1}{3^{r-1}}\left(\frac{1}{r!}-\frac{1}{(r-1)!}\right)$$ ⑤

$\frac{1}{3^{r-1}}U_r=W_r$ என்க. $\Rightarrow\ W_r=f(r)-f(r-1)$

இங்கு $f(r)=\frac{1}{3^r}\left(\frac{1}{(r+1)!}-\frac{1}{r!}\right)$ ⑤

$$W_r=f(r)-f(r-1)$$

$$r=1\Rightarrow\quad W_1=f(1)-f(0)$$

$$r=2\Rightarrow\quad W_2=f(2)-f(1)$$ ⑤

$$r=3\Rightarrow\quad W_3=f(3)-f(2)$$

$$\vdots\qquad\quad \vdots\qquad \vdots\qquad\quad \vdots$$

$$r=n-1\Rightarrow\quad W_{n-1}=f(n-1)-f(n-2)$$ ⑤

$$r=n\Rightarrow\quad \underline{W_n=f(n)-f(n-1)}$$

$$\sum_{r=1}^{n}W_r=f(n)-f(0)$$ ⑤

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{3^{r-1}}\ U_r=\frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}\right)-\frac{1}{1}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1}\right)$$ ⑤

$$=-\frac{n}{3^n(n+1)!}$$ ⑤

$\boxed{40}$

- -

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{3^{r-1}}U_r\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}\right)\right]$$ ⑤

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{3^{r-1}}U_r=0$$ ⑤

முடிவிலி தொடர் ஒருங்கும் அதன் கூட்டுத்தொகை 0 ஆகும்.

$$V_r=\left(\frac{1}{3^r}U_{r+1}\right)+k\left(\frac{1}{3^{r-2}}U_{r-1}\right)$$

$$V_r=W_{r+1}+k\ W_{r-1}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}V_r=\sum_{r=1}^{\infty}W_{r+1}+k\ \sum_{r=1}^{\infty}W_{r-1}$$

$$\frac{1}{12}=\sum_{r=1}^{\infty}W_r-W_1+k\left[\sum_{r=1}^{\infty}W_r+W_0\right]$$ ⑤

$$1/12=0-U_1+k(0+3U_0)$$

$$\frac{1}{12}=3k\times(-1)-\left(-\frac{1}{6}\right)$$ ⑤

$$k=1/36$$ ⑤

$\boxed{25}$

- -

13. (*a*) $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ எனக்கொள்வோம்; எல்லா $a\in\mathbb{R}$ இற்கும் A^{-1} இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

$P=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ஆகிய தாயங்கள் $A^2R=A-PQ^T$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ளன. $a=2$ எனக் காட்டுக.

a இன் இப்பெறுமானத்திற்கு A^{-1} ஐ எழுதி, **இதிலிருந்து** $2A^2-AX+4I=0$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக தாயம் X ஐக் காண்க.

(*b*) $x,y\in\mathbb{R}$ ஆயிருக்க $z=x+iy$ என்பது ஓர் சிக்கலெண்ணை வகைகுறிப்பின் z இன் மட்டு $|z|$ ஐயும் z இன் உடன்புணரிச்சிக்கலெண் $\overline{z}$ ஐயும் எழுதுக.

$|z|^2=z\overline{z}$ எனவும், $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$ எனவும் காட்டி, **இதிலிருந்து,**

$|z-2i|^2=|z|^2-4\,\mathrm{Im}(z)+4$ எனவும், $|1+2iz|^2=4|z|^2-4\,\mathrm{Im}(z)+1$ எனவும் காட்டி, $|1+4iz|^2$ இற்கு இயல்பொத்த கோவையைப் பெற்று, $|z-2i|<|1+2iz|$ இனையும், $2|z-2i|^2\geq|1+4iz|^2$ இனையும் ஒருங்கே திருப்தி செய்யும் பிரதேசத்தில் $\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i$ எனும் சிக்கலெண் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

(*c*) $z=\cot\theta\,(\cot\theta+2i)$ எனவும் $n\in\mathbb{Z}^+$ எனவும் $k\in\mathbb{R}$ இற்கு $\theta\neq k\pi$ எனவும் கொள்வோம்.

தமோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(z-1)^n=\cos ec^{2n}\theta\,(\cos 2n\theta+i\sin 2n\theta)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $(\overline{z}-1)^n$ இற்கு ஓர் இயல்பொத்த கோவையைப் பெற்று $(z-1)^n+(\overline{z}-1)^n=2\cos ec^{2n}\theta\,\cos 2n\theta$ எனக் காட்டுக.

$(z-1)^{2023}+(\overline{z}-1)^{2023}=0$ இனைத் தீர்க்க.

(*a*)

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A|=0-(-1)$ ⑤

$=1$

$|A|\neq 0$ ⑤

$\therefore$ எல்லா $a\in\mathbb{R}$ இற்கும் A^{-1} இருக்கின்றது. $\boxed{10}$

- -

$$A^2=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^2-1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}$$ ⑤

$$A^2R=\begin{pmatrix} a^2-1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

பக். 18 ஐப் பார்க்க

$$=\begin{pmatrix} -2a^2-4a+2 & -a \\ -2a-4 & -1 \end{pmatrix}$$ ⑤

$$PQ^T=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$ ⑤

$$=\begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$ ⑤

$$A-PQ^T=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a-16 & -2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$$ ⑤

$$A-PQ^T=A^2R$$

$$\begin{pmatrix} a-16 & -2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2a^2-4a+2 & -a \\ -2a-4 & -1 \end{pmatrix}$$ ⑤

$$a=2$$

$\boxed{30}$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$ ⑤

$$=1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2A^2-AX+4I=0$$

$$A^{-1}AX=2A^{-1}AA+4A^{-1}I$$ ⑤

$$X=2A+4A^{-1}$$ ⑤

$$=2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$ ⑤

$\boxed{20}$

(b)

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ⑤

$\overline{z}=x-iy$ ⑤

$z\overline{z}=(x+iy)\,(x-iy)$ $\qquad$ $|z|^2=x^2+y^2$

$=x^2-(iy)^2$ ⑤

பக். 19 ஐப் பார்க்க

$= x^2 + y^2 \qquad \Rightarrow \quad z\bar{z} = |z|^2$

$z - \bar{z} = x + iy - (x - iy)$

$= 2iy$ ⑤

$= 2i\,\mathrm{Im}(z)$

$|z-2i|^2 = (z-2i)\,(\overline{z-2i})$

$= (z-2i)\,(\bar{z}+2i)$ ⑤

$|z-2i|^2 = z\bar{z} + 2i\,(z-\bar{z}) - 4(-1)$

$= |z|^2 + 2i \times 2i \times \mathrm{Im}(z) + 4$ ⑤

$= |z|^2 - 4\,\mathrm{Im}(z) + 4$

$|1+2iz|^2 = (1+2iz)\,(\overline{1+2iz})$

$= (1+2iz)\,(1-2i\,\bar{z})$

$= 1 + 4z\bar{z} + 2i\,(z-\bar{z})$

$= 4|z|^2 + 2i \times 2i\,\mathrm{Im}(z) + 1$ ⑤

$= 4|z|^2 - 4\,\mathrm{Im}(z) + 1$

$|1+4iz|^2 = (1+4iz)\,(\overline{1+4iz})$

$= (1+4iz)\,(1-4i\,\bar{z})$

$= 1 + 4i(z-\bar{z}) + 16z\bar{z}$ ⑤

$= 16|z|^2 - 8\,\mathrm{Im}(z) + 1$

$\boxed{40}$

$|z-2i| < |1+2iz|$

$|z-2i|^2 < |1+2iz|^2$

$|z|^2 - 4\,\mathrm{Im}(z) + 4 < 4|z|^2 - 4\,\mathrm{Im}(z) + 1$

$|z| > 1$ ⑤

$2|z-2i|^2 \geq |1+4i\,z|^2$

$2|z|^2 - 8\,\mathrm{Im}(z) + 8 \geq 16|z|^2 - 8\,\mathrm{Im}(z) + 1$

$|z| \leq 1/\sqrt{2}$ ⑤

$\omega = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}\,i}{4}$ என்க.

$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)$

பக். 20 ஐப் பார்க்க

$$= \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$ ⑤

$$|\omega| = \frac{3}{2}$$

$$|\omega| > 1$$ ⑤

எனவே $\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}\,i}{4}$ எனும் சிக்கலெண் குறித்த பிரதேசத்தில் இருக்கும். $\boxed{20}$

(c) $z = \cot\theta(\cot\theta + 2i)$

$$z - 1 = \cot^2\theta - 1 + 2\cot\theta\, i$$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin^2\theta} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, i$$ ⑤

$$= \cos ec^2\theta(\cos 2\theta + \sin 2\theta\, i)$$

$$(z-1)^n = \cos ec^{2n}\theta\left[\cos 2\theta + i\sin 2\theta\right]^n$$

$$= \cos ec^{2n}\theta(\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta) \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_ } ①$$ ⑤

$$\bar{z} - 1 = \cos ec^2\theta(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

$$= \cos ec^2\theta\left(\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\right)$$

$$(\bar{z}-1)^n = \cos ec^{2n}\theta\left(\cos(-2n\theta) + i\sin(-2n\theta)\right)$$

$$(\bar{z}-1)^n = \cos ec^{2n}\theta\left(\cos 2n\theta - i\sin 2n\theta\right) \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_ } ②$$ ⑤ $\boxed{15}$

① + ② $\Rightarrow$

$$(z-1)^n + (\bar{z}-1)^n = 2\cos ec^{2n}\theta\ \cos 2n\theta$$ ⑤

$n = 2023 \Rightarrow$

$$(z-1)^{2023} + (\bar{z}-1)^{2023} = 2\cos ec^{4046}\theta\ \cos 4046\theta$$

$$0 = 2\cos ec^{4046}\theta\ \cos 4046\theta$$

$$\cos 4046\theta = 0$$ ⑤ $(\theta \neq k\pi)$

$$\theta = \frac{1}{4046}\left(2m\pi \pm \frac{\pi}{2}\right)$$ ⑤

இங்கு $m \in \mathbb{Z}^+$

$\boxed{15}$

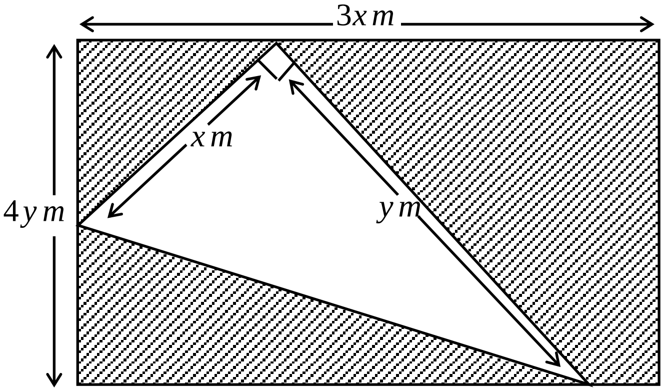
பக். 21 ஐப் பார்க்க

14. (a) $x \neq 2$ இற்கு $f(x)=\dfrac{x(x+4)}{(x-2)^2}$ எனக்கொள்வோம்.

$f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $x \neq 2$ இற்கு $f'(x)=\dfrac{-8(x+1)}{(x-2)^3}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக. **இதிலிருந்து,** $f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடையையும் $f(x)$ குறையும் ஆயிடைகளையும் காண்க. அத்துடன், $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க. $x \neq 2$ இற்கு $f''(x)=\dfrac{8(2x+5)}{(x-2)^4}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $y=f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. அணுகுகோடுகள், திரும்பற்புள்ளி, விபத்திப் புள்ளி, ஆகியவற்றைக் காட்டி, $y=f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

$(-\infty, k]$ மீது $f(2x)$ ஒன்றுக்கொன்றாக இருக்கும் k இன் மிகப்பெரிய பெறுமானத்தை எடுத்துரைக்க.

(b) படத்திற் காட்டப்பட்ட செவ்வகத்தின் சுற்றளவு $48\,m$ ஆகும். நிழற்றிய பிரதேசமானது நீளம் $4y\,m$ ஐயும் அகலம் $3x\,m$ ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வகத்திலிருந்து அயல்பக்கங்கள் $x\,m$, $y\,m$ ஐ உடைய ஒரு செங்கோண முக்கோணியை அகற்றுவதால் பெறப்பட்டுள்ளது. நிழற்றிய பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $A\,m^2$ ஆனது $0<x<8$ இற்கு $A=69x-\dfrac{69}{8}x^2$ இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.



A உயர்ந்தபட்சமாக இருக்கத்தக்கதாக அகற்றிய செங்கோண முக்கோணியின் சுற்றளவைக் காண்க.

(a) $$f(x)=\frac{x(x+4)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-2)^2\,(x+x+4)-x(x+4)2(x-2)}{(x-2)^4} \quad ⑳$$

$$=\frac{(x-2)(2x+4)-2x(x+4)}{(x-2)^3}$$

$$f'(x)=\frac{-8(x+1)}{(x-2)^3} \quad ⑤$$

$\boxed{25}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \; x=-1,\; f(x)=-{}^{1}\!/_{3}$ ⑤

திருப்பல் புள்ளி $\equiv \left(-1, -{}^{1}\!/_{3}\right)$

நிலைக்குத்து அணுகுகோடு $\Rightarrow x=2$ ⑤

	$-\alpha<x<-1$	$-1<x<2$	$2<x<\alpha$
$f'(x)$ இன் குறி	$(-)$ சார்பு குறையும்	$(+)$ சார்பு கூடும்	$(-)$ சார்பு குறையும்

⑤ ⑤ ⑤ $\boxed{25}$

பக். 22 ஐப் பார்க்க

$x=-1$ இல் வரைபு இழிவு ⑤

இழிவுப் புள்ளி $\equiv \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$ ⑤

$f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடை $[-1, 2)$

$f(x)$ குறையும் ஆயிடை $(-\infty, -1], (2, \infty)$

$\boxed{10}$

$$f''(x)=\frac{8(2x+5)}{(x-2)4}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$ ⑤

	$-\infty < x < -\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2} < x < 2$
$f''(x)$ இன் குறி	$(-)$	$(+)$
குழிவு நிலை	கீழ்முக குழிவு	மேன்முக குழிவு

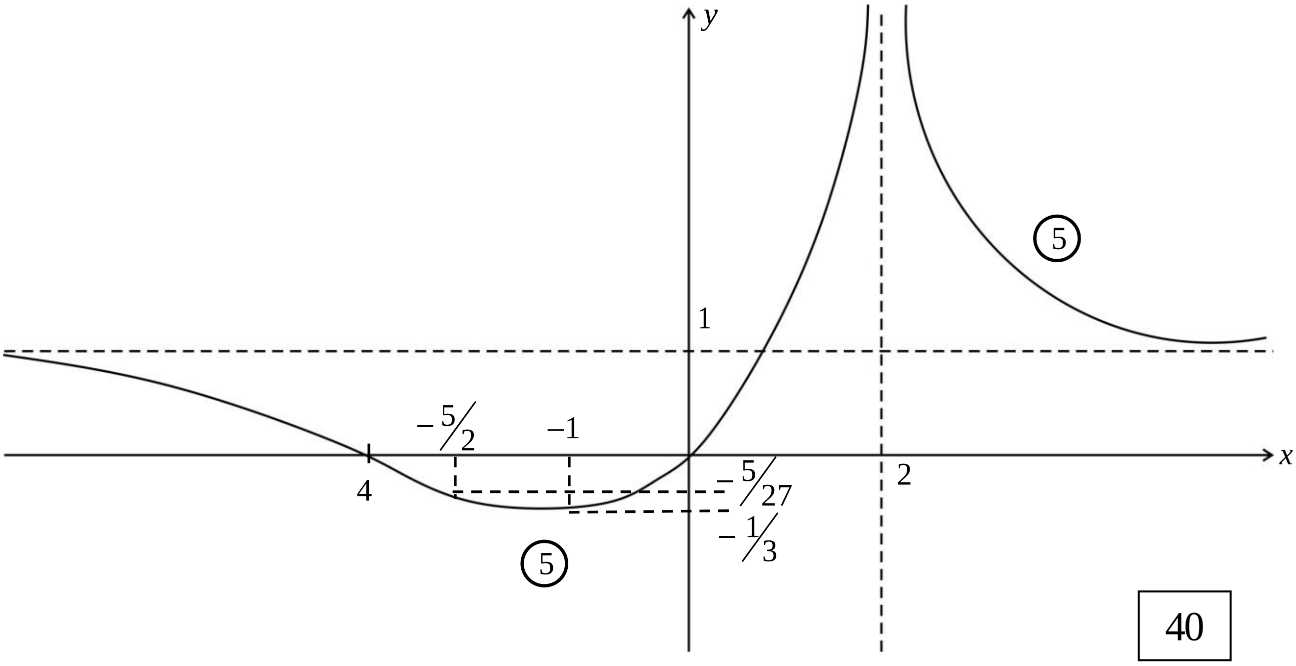
⑤ ⑤

விபத்திப்புள்ளி $\equiv \left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{27}\right)$ ⑤

x வெட்டுத்துண்டு $\equiv (0, 0), (-4, 0)$ ⑤

y வெட்டுத்துண்டு $\equiv (0, 0)$

இடை அணுகுகோடு $\lim\limits_{x\to\pm\alpha} f(x)=1 \quad \therefore \quad y=1$ ⑤



$\boxed{40}$

$(-\infty, k]$ மீது $f(x)$ ஒன்றுக்கொன்றாக இருக்கும் x இன் மிகப்பெரிய பெறுமானம் $x=-1$

$x \to 2x \quad f(x) \to f(2x)$

$2x=-1$

$k=-\frac{1}{2}$ ⑤

$\boxed{5}$

(b)

செவ்வகத்தின் சுற்றளவு, $48 = 6x + 8y$

$$y = \frac{24-3x}{4} \quad ⑤ \qquad (\therefore \; x < 8)$$

$$A = 3x \times 4y - \frac{1}{2}xy \quad ⑤$$

$$= \frac{23}{2}xy$$

$$= \frac{23}{2}x\left(\frac{24-3x}{4}\right) \quad ⑤$$

$$A = 69x - \frac{69}{8}x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 69 - \frac{69}{8} \times 2x \quad ⑤$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 4 \quad ⑤$$

$0 < x < 4$ ஆக $\frac{dA}{dx} > 0$

⑤

$4 < x < 8$ ⑤ ஆக $\frac{dA}{dx} < 0$

$\therefore \; x = 4$ இல் பரப்பு A உயர்வு ⑤

முக்கோணியின் சுற்றளவு $= x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$

$= 4 + 3 + \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= 12 \; m$ ⑤

$\boxed{45}$

பக். 24 ஐப் பார்க்க

15. (a) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $x(2x^2+3) \equiv A(2x^2+2x+1)(1-x) + (Bx+C)(1-x) + D(2x^2+2x+1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C, D ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க. **இதிலிருந்து** $\dfrac{x(2x^2+3)}{(1-x)\,(2x^2+2x+1)}$ ஐப் பகுதிப்பின்னங்களாக எழுதி $\displaystyle\int \frac{x(2x^2+3)}{(1-x)\,(2x^2+2x+1)}\,dx$ ஐக் காண்க.

(b) $t = \sec x + \sqrt{\tan^2 x + 2}$ என்க. $\dfrac{(t-1)(t+1)}{t} = 2\sec x$ எனக்காட்டி

இதிலிருந்து, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left[\frac{\left(\sec x + \sqrt{\tan^2 x + 2}\right)}{\left(\sec x + \sqrt{\tan^2 x + 2}\right)^2 - 1} \right]^5 dx = \frac{1}{60}$ எனக் காட்டுக.

(c) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\displaystyle\int_1^e x(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{4}(e^2-1)$ எனக் காட்டுக.

(a) $x(2x^2+3) \equiv A(2x^2+2x+1)(1-x) + (Bx+C)(1-x) + D(2x^2+2x+1)$

$x^3 :-$ $2 = -2A \Rightarrow A = -1$ ⑤

$x^2 :-$ $0 = -B + 2D$

$x :-$ $3 = A + B - C + 2D \Rightarrow 4D - C = 4$ _______ ①

$x^0 :-$ $0 = A + C + D \Rightarrow C + D = 1$ _______ ②

① + ② $\Rightarrow D = 1,\ C = 0,\ B = 2$

⑤ ⑤ ⑤

$\boxed{20}$

- -

$$x(2x^2+3) = -(1-x)\,(2x^2+2x+1) + 2x(1-x) + (2x^2+2x+1)$$

$$\frac{x(2x^2+3)}{(1-x)\,(2x^2+2x+1)} \equiv -1 + \frac{2x}{2x^2+2x+1} + \frac{1}{1-x} \quad ⑤$$

$$\int \frac{x(2x^2+3)}{(1-x)(2x^2+2x+1)}\,dx = -\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{4x+2-2}{2x^2+2x+1}\,dx + \int \frac{dx}{1-x} \quad ⑤$$

$$= -\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}\,dx + \int \frac{1}{1-x}\,dx \quad ⑤$$

$$= -x + \frac{1}{2}\ln(2x^2+2x+1) - \frac{1}{2}\cdot 2\tan^{-1}\left(\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right) + \frac{\ln|1-x|}{-1} + C \quad ㉕$$

$$= -x + \frac{1}{2}\ln(2x^2+2x+1) - \tan^{-1}(2x+1) - \ln|1-x| + C$$

இங்கு $C-$ எதேச்சை மாறிலி.

$\boxed{40}$

- -

பக். 25 ஐப் பார்க்க

(*b*) $t = \sec x + \sqrt{\tan^2 x + 2}$

$$\frac{t^2 - 1}{t} = t - \frac{1}{t} \quad ⑤$$

$$= \sec x + \sqrt{\tan^2 x + 2} - \frac{\sec x - \sqrt{\tan^2 x + 2}}{\sec^2 x - (\tan^2 x + 2)} \quad ⑤$$

$$= \sec x + \sqrt{\tan^2 x + 2} - \frac{\left(\sec x - \sqrt{\tan^2 x + 2}\right)}{1 - 2 \ ⑤}$$

$$= 2\sec x \quad ⑤$$

$$\boxed{20}$$

$$\int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sec x + \sqrt{\tan^2 x + 2}}{\left(\sec x + \sqrt{\tan^2 x + 2}\right)^2 - 1}\right]^5 dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos x}{2}\right)^5 dx \quad ⑤$$

$$= \frac{1}{32} \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx$$

$\sin x = t$ என்க. ⑤

$\cos x \, dx = dt$

$x \to 0$ ஆக $t \to 0$ ⑤

$x \to \pi/2$ ஆக $t \to 1$ ⑤

$$= \frac{1}{32} \int_0^1 (1 + t^4 - 2t^2) \, dt \quad ⑤$$

$$= \frac{1}{32} \left[t \Big|_0^1 + \frac{t^5}{5} \Big|_0^1 - 2\frac{t^3}{3} \Big|_0^1 \right] ⑤$$

$$= \frac{1}{32} \left[1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right] \quad ⑤$$

$$= \frac{1}{60} \quad ⑤$$

$$\boxed{40}$$

பக். 26 ஐப் பார்க்க

(c) $\int_1^e x(\ln x)^2 \, dx$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times 2\ln x \times \frac{1}{x} dx \quad ⑤ + ⑤$$

$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \int_1^e x \ln x \, dx \quad ⑤$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left\{ \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx \right\} \quad ⑤$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left\{ \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2}\Big|_1^e \right\} \quad ⑤$$

$$= \frac{1}{4}(e^2 - 1) \quad ⑤$$

$\boxed{30}$

16. $P \equiv (x_0,\, y_0)$ எனவும் l_1 ஆனது $ax+by+c_1=0$ இனால் தரப்படும் நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். P இலிருந்து l_1 இற்குள்ள செங்குத்துத்தூரம் $\frac{|ax_0+by_0+c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனக்காட்டுக. l_2 ஆனது $ax+by+c_2=0$ இனாலும் தரப்படும் நேர்கோடு எனக் கொள்வோம். மேலுள்ள முடிவைப் பயன்படுத்தி l_1, l_2 இற்கிடைப்பட்ட செங்குத்துத்தூரம் $\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனக் காட்டுக.

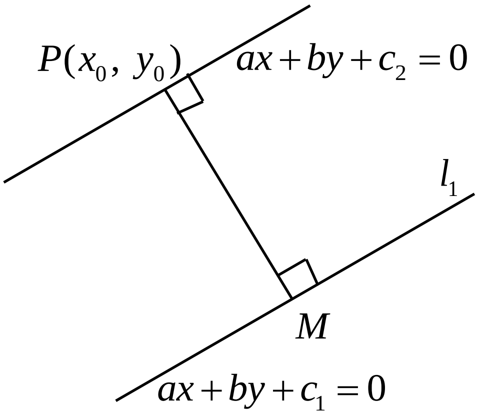
$ABCD$ என்பது பக்கம் AB இன் சமன்பாடு $x+2y+3=0$ ஆகவும் CD இன் சமன்பாடு $x+2y-2=0$ ஆகவும் உள்ள ஒரு சதுரமாகும். BC, AD ஆகிய கோடுகள் y அச்சை முறையே $(0, \alpha), (0, \beta)$ இல் இடைவெட்டுகின்றது. உச்சிகள் B, D இன் ஆள்கூறுகளை α, β இல் காண்க. இங்கு $\alpha < \beta$ ஆகும். **இதிலிருந்து** உச்சி D ஆனது x அச்சில் இருப்பின் α, β இனைக் காண்க.

B, D இனை மையங்களாகவும் சமனான ஆரைகளையும் உடைய வட்டங்கள் S_1, S_2 என்பன A, C யினூடாகச் சென்றால் அவ்வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. அத்துடன் இவ்வட்டங்களின் பொதுநாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இப்பொதுநாணின் மீதுள்ள யாதும் ஒரு புள்ளியானது $(7+3t,\, t)$ எனும் பரமான முறையில் எழுதலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு t பரமானம்.

இதிலிருந்து இப்பொதுநாண் மீது மையத்தையும் S_1, S_2 இன் பரிதியை இருசமகூறிடுவதுமான வட்டச் சமன்பாடு $x^2+y^2-2(7+3t)\,x-2ty+12t+19=0$ இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

மேற்குறித்த வட்டங்களிடையே வட்டம் $x^2+y^2-2x-4y-3=0$ ஐ நிமிர்கோண முறையாக இடைவெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



இங்கு $a^2+b^2 \neq 0$

நேர்கோடு PM இன் சமன்பாடு $(y-y_0)=\frac{b}{a}(x-x_0)$

P இனூடாகச் செல்வதும் l_1 இற்கு செங்குத்தானதுமான கோட்டிலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி $(x_0+at,\, y_0+bt)$ ⑤

இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

M ஆனது l_1 இல் உள்ளது. $a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c_1=0$ ⑤

$$\therefore\ t(a^2+b^2) = -ax_0+by_0+c_1$$

$$\therefore\quad t=\frac{-(ax_0+by_0+c_1)}{a^2+b^2} \quad ⑤$$

$\therefore$ தேவையான தூரம் $PM=\sqrt{a^2t^2+b^2t^2}$ ⑤

$$=\sqrt{a^2+b^2}\,|t|$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad ⑤$$

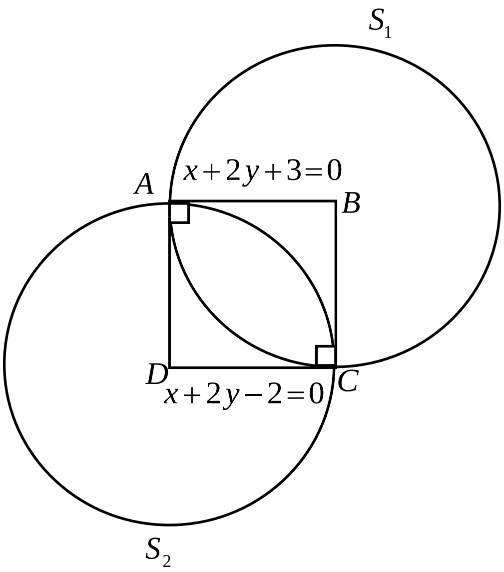
பக். 28 ஐப் பார்க்க

$P(x_0, y_0)$ எனும் புள்ளி $ax+by+c_2=0$ எனும் கோட்டில் இருப்பதால் $ax_0+by_0+c_2=0$ ⑤

$$PM=\frac{|ax_0+by_0+c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ⑤

$\boxed{35}$



$MAB=-\frac{1}{2}$

$AB\perp AD$

$MAD=2$ ⑤

$(0,\beta)\Rightarrow$

$y-\beta=2(x-0)$

$AD\equiv 2x-y+\beta=0$ ⑤

$(0,\alpha)\Rightarrow BC\equiv y-\alpha=2(x-0)$

$2x-y+\alpha=0$ ⑤

செங்குத்துத் தூரம் $d=\frac{|3-(-2)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|\beta-\alpha|}{\sqrt{2^2+1^2}}$ ⑤ + ⑤

$\beta-\alpha=5$ ⑤ $(\therefore\ \beta>\alpha)$

$$\begin{array}{l} x+2y+3=0\\ \underline{2x-y+\alpha=0}\\ 5x=-2\alpha+(-3)\end{array}$$

$x=-\frac{(2\alpha+3)}{5}$

$y=\frac{\alpha-6}{5}$ ⑤

$B\equiv\left(-\frac{(2\alpha+3)}{5},\frac{\alpha-6}{5}\right)$

$$\begin{array}{l} x+2y-2=0\\ \underline{2x-y+\beta=0}\\ 5x=2-2\beta\end{array}$$

$x=\frac{2-2\beta}{5}$

$y=\frac{4+\beta}{5}$ ⑤

$D\equiv\left(\frac{2-2\beta}{5},\frac{4+\beta}{5}\right)$

$\frac{4+\beta}{5}=0\Rightarrow\beta=-4,\ \alpha=-9$ ⑤ + ⑤

$\boxed{50}$

$AD=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

ஆரை $=\sqrt{5}$ ⑤

மையம் $\equiv(3,-3),(2,0)$

பக். 29 ஐப் பார்க்க

வட்டம் $S_1 \equiv (x-3)^2 + (y+3)^2 = 5$

$x^2 + y^2 - 6x + 6y + 13 = 0$ ⑤

வட்டம் $S_2 \equiv (x-2)^2 + (y-0)^2 = 5$

$x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ ⑤

பொதுநாணின் சமன்பாடு

$S_1 - S_2 = 0$

$-2x + 6y + 14 = 0$ ⑤

$x - 3y - 7 = 0$

$y = t$ என்க

$x = 7 + 3t$ ⑤

பொதுநாணில் உள்ள எந்தவொரு புள்ளி $\equiv (7+3t,\ t)$

தேவையான சமன்பாடு

$S \equiv \left[x-(7+3t)\right]^2 + (y-t)^2 = r^2$ ⑤

$S \equiv x^2 + y^2 - 2(7+3t)x - 2ty - r^2 + (7+3t)^2 + t^2 = 0$

$S,\ S_2$ இற்கான பொதுநாணின் சமன்பாடு

$S - S_2 = 0$

$-2(7+3t)x + 4x - 2ty - r^2 + (7+3t)^2 + t^2 + 1 = 0$ ⑤

பரிதியை இருசமகூறிடுவதால் $(2,0) \Rightarrow$

$-2(7+3t)2 + 4\times 2 - r^2 + (7+3t)^2 + t^2 + 1 = 0$ ⑤

$-r^2 + (7+3t)^2 + t^2 = 19 + 12t$ ⑤

$S \equiv x^2 + y^2 - 2(7+3t)x - 2ty + 12t + 19 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$

$2(-7-3t)\ (-1) + 2(-t)(-2) = 12t + 19 - 3$ ⑤ + ⑤

$t = -1$ ⑤

$S \equiv x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0$ ⑤

$\boxed{65}$

பக். 30 ஐப் பார்க்க

17. (a) $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha$ ஆகியவற்றை $\tan\alpha$ இல் எழுதுக.

இதிலிருந்து, $\tan 2\alpha$ இனை $\tan\alpha$ இல் காண்க.

α இற்கு தகுந்த பிரதியீட்டை வழங்குவதன் மூலம் $\cot 2\theta = \dfrac{2p}{p^2-1}$ ஆகுமாறு p இனை θ இன் சார்பில் காண்க.

இதிலிருந்து $\cot 2\beta = \dfrac{2q}{q^2-1}$ ஆகுமாறு q இனை β இன் சார்பில் எழுதுக.

$pq = \cot^2 x$ எனத்தரப்படின் $\cot^2 x = \dfrac{a+b}{a-b}$ எனக் காட்டுக.

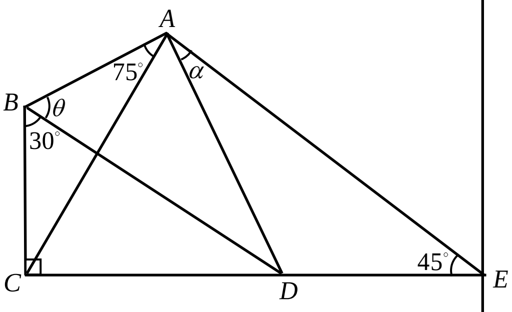
இங்கு $\dfrac{(1+\tan\theta)\ (1+\tan\beta)}{(1-\tan\theta)\ (1-\tan\beta)} = \dfrac{a+b}{a-b}$ ஆகும்.

மேலும் $\cos 2x = \dfrac{b}{a}$ எனக் காட்டுக.

(b) (i) $\sin(A+B)$ இற்கான விரிவைப் பயன்படுத்தி $\sin 75^\circ$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு முக்கோணி ABC இற்கு சைன்நெறியைக் கூறுக.

அருகிலுள்ள உருவில் காட்டப்பட்டவாறு நாற்பக்கல் $ABCE$ இல் D யானது CE இன் நடுப்புள்ளி யாகும். $B\hat{C}E = 90^\circ,\ A\hat{B}D = \theta,\ D\hat{A}E = \alpha$ ஆகும். $AC = AD$ எனத்தரப்படின் பொருத்தமான மூன்று முக்கோணிகளுக்கு சைன்நெறியைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் $\cos ec\alpha \sin 75^\circ = \sqrt{6}\sin(\theta+30^\circ)$ எனக் காட்டுக. **இதிலிருந்து** $\sin\alpha\sin(\theta+30) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{3}}$ என்பதை உய்த்தறிக.



(c) $2\cot^{-1}\left(\ln x^2\right) = \cos^{-1}\left(2\ln e^{7/18}\right)$ இனைத் தீர்க்க.

(a) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ ⑤

$\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ ⑤

$\tan 2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ ⑤

$= \dfrac{2\tan\alpha / 1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha / 1+\tan^2\alpha}$

$\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2 a}$ ⑤

$\boxed{20}$

பக். 31 ஐப் பார்க்க

$$\alpha=\frac{\pi}{4}-\theta \Rightarrow \quad ⑤$$

$$\tan 2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{2\tan\left(\pi/4-\theta\right)}{1-\tan^2\left(\pi/4-\theta\right)} \quad ⑤$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\frac{2/\cot\left(\pi/4-\theta\right)}{1-\dfrac{1}{\cot^2\left(\pi/4-\theta\right)}}$$

$$\cot 2\theta=\frac{2\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}{\cot^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)-1} \quad ⑤$$

$$\cot 2\theta=\frac{2p}{p^2-1}$$

$$p=\cot\left(\pi/4-\theta\right) \quad ⑤$$

$$\cot 2\beta=\frac{2q}{q^2-1}$$

$$q=\cot\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right) \quad ⑤$$

$$pq=\cot^2 x$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=\cot^2 x$$

$$\frac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}\ \frac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)}=\cot^2 x$$

$$\frac{(1+\tan\theta)}{(1-\tan\theta)}\ \frac{(1+\tan\beta)}{(1-\tan\beta)}=\cot^2 x \quad ⑤$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\cot^2 x$$

$$\cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \quad ⑤$$

$$=\frac{1-\dfrac{a-b}{a+b}}{1+\dfrac{a-b}{a+b}} \quad ⑤$$

$$=\frac{(a+b)-(a-b)}{a+b+a-b}=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}$$

$\boxed{40}$

பக். 32 ஐப் பார்க்க

(b) (i)

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$A=45^\circ,\ B=30^\circ \Rightarrow$ ⑤

$$\sin 75^\circ=\sin 45\cos 30^\circ+\cos 45\sin 30$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}$$ ⑤

$$\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$ ⑤

(ii) $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin A}=\frac{C}{\sin C}$$ ⑤

$\Delta\ ABC$ இல்

$$\frac{AC}{\sin(\theta+30^\circ)}=\frac{BC}{\sin 75^\circ}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}①$$ ⑤

$\Delta\ ADE$ இல்

$$\frac{AD}{\sin 45^\circ}=\frac{DE}{\sin\alpha}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}②$$ ⑤

$$\frac{(1)}{(2)}\Rightarrow\quad\frac{\sin 45^\circ}{\sin(\theta+30^\circ)}=\frac{BC}{DE}\ \frac{\sin\alpha}{\sin 75^\circ}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}③$$ ⑤

$\Delta\ BCD$ இல்

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ}=\frac{DC}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{BC}{DE}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}\ (\therefore DC=DE)$$ ⑤

$$(3)\Rightarrow\frac{\sin 45^\circ}{\sin(\theta+30)}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}\ \frac{\sin\alpha}{\sin 75^\circ}$$ ⑤

$$\sin 75^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\alpha\sin(\theta+30^\circ)\ \sqrt{3}$$

$$\cos ec\alpha\sin 75^\circ=\sqrt{6}\ \sin(\theta+30^\circ)$$ ⑤

$$\sin\alpha\sin(\theta+30^\circ)=\frac{{}^{\sqrt{3}+1}\!/_{2\sqrt{2}}}{\sqrt{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{3}}$$ ⑤

$\boxed{55}$

பக். 33 ஐப் பார்க்க

(c) $2\cot^{-1}(\ln x^2) = \cos^{-1}\left(2\ln e^{7/18}\right)$

$\cot^{-1}(\ln x^2) = \alpha \Rightarrow \cot\alpha = \ln x^2 = 2\ln x$

$\cos^{-1}\left(2\ln e^{7/18}\right) = \beta \Rightarrow \cos\beta = 2\ln e^{7/18}$

$= 7/9$ ⑤

$2\alpha = \beta$

$\cos 2\alpha = \cos\beta$ ⑤

$\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{7}{9}$ ⑤

$\dfrac{\cot^2\alpha - 1}{\cot^2\alpha + 1} = \dfrac{7}{9}$

$\cot^2\alpha = 8$ ⑤

$(2\ln x)^2 = 8$

$(\ln x)^2 = 2$

$\ln x = \pm\sqrt{2}$ ⑤

$x = e^{\sqrt{2}},\ e^{-\sqrt{2}}$ ⑤ + ⑤

$\boxed{35}$

---

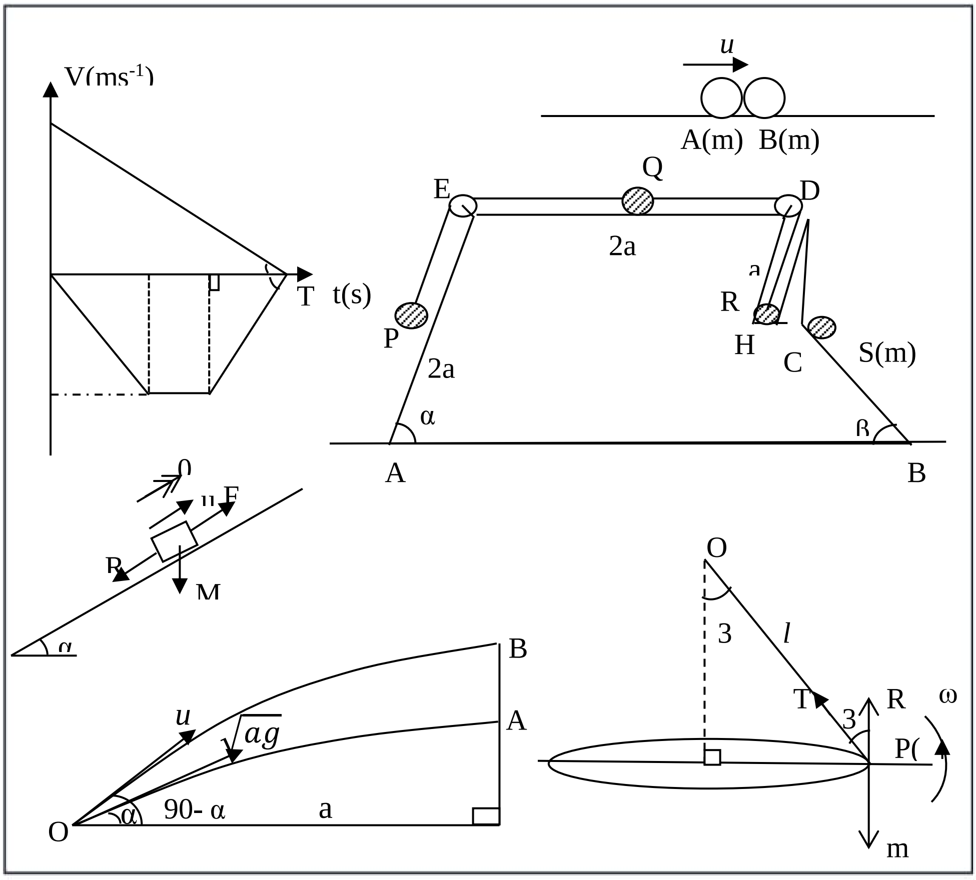
* * *

மொறட்டுவைப் பல்கலைக்கழக பொறியியற் பீட தமிழ் மாணவர்கள்
நடாத்தும் க.பொ.த உயர்தர மாணவர்களுக்கான 14வது

முன்னோடிப் பரீட்சை 2023

10(II) - இணைந்தகணிதம் II

விடைகள் (புள்ளியிடும் திட்டம்)

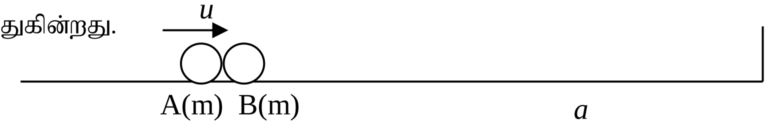


Prepared By
P.Senthilnathan *B.Sc, Dip in Ed*

Mora E-fac Tamil Students 2023 | Examination Committee

Part-A

1) திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை B ஆனது ஒப்பமான கிடைத்தளத்தில் நிலைக்குத்து சுவரில் இருந்து a தூரத்தில் ஓய்வில் உள்ளது. அதே திணிவுடைய A எனும் துணிக்கை படத்தில் காட்டியவாறு u கதியுடன் B உடன் நேரடியாக மோதுகின்றது. துணிக்கைகளிற்கு இடையில் உள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ எனின் மோதுகைக்கு சற்று பின் A,B இன் வேகங்கள் முறையே $\frac{1}{4}u, \frac{3}{4}u$ எனக் காட்டுக. B ஆனது சுவரை மோதும் கணத்தில் A ஆனது சுவரில் இருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் இருக்கும் எனக் காண்க.



தொகுதிக்கு $I = \Delta(mu)$

$\rightarrow 0 = (mV_A + mV_B) - (mu + m0)$

$V_A + V_B = u$...........(1) $\boxed{05}$

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதி

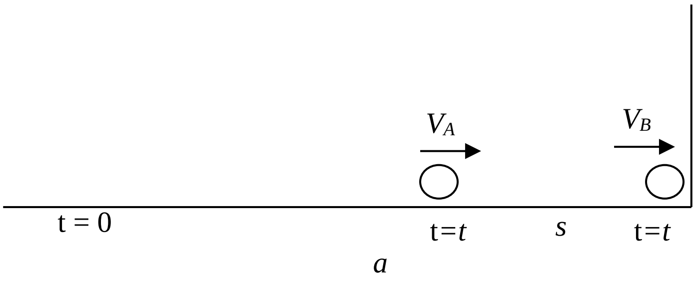
$$-V_A + V_B = \frac{1}{2}(u+0)$$

$$-V_A + V_B = \frac{1}{2}u\text{...........(2)} \quad \boxed{05}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow V_A = \frac{1}{4}u$$

$$(1)+(2) \Rightarrow V_B = \frac{3}{4}u \quad \boxed{05}$$

நேரத்தை சமப்படுத்த.



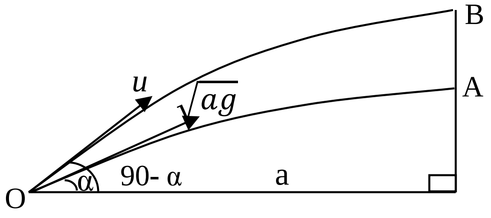
$$\frac{a}{V_B} = \frac{a-s}{V_A} \quad \boxed{05}$$

$$\Rightarrow a \times \frac{4}{3u} = (a-s) \times \frac{4}{u}$$

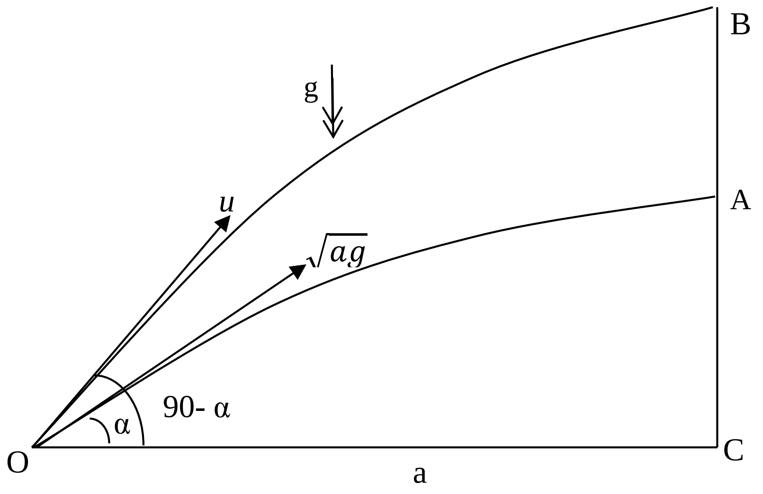
$$a = 3a - 3s$$

$$s = \frac{2a}{3} \quad \boxed{05}$$

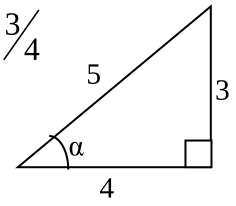
2) கிடைத்தரையில் உள்ள புள்ளி O வில் இருந்து P,Q எனும் இரு துணிக்கைகள் ஒரே நேரத்தில் முறையே $\sqrt{ag}, u$ கதிகளுடன் கிடையுடன் முறையே $\alpha, 90-\alpha$ கோணத்தில் ஒரே நிலைக்குத்து தளத்தில் இயங்குமாறு புவியீர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றன.



இத்துணிக்கைகள் அவை இயங்கும் நிலைக்குத்து தளத்திற்கு செங்குத்தாக O வில் இருந்து a தூரத்தில் உள்ள நிலைக்குத்து சுவரை ஒரே நேரத்தில் A,B எனும் புள்ளிகளில் அடிக்கின்றன. $u = \frac{4}{3}\sqrt{ag}$ எனக் காட்டி, AB ஐ a இல் காண்க. இங்கு $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ ஆகும்.



$$\alpha = \tan^{-1}\left(3\!/\!_4\right) \Rightarrow \tan\alpha = 3\!/\!_4$$



$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$(P) \to a = \sqrt{ag}\,\cos\alpha t + 0$$

$$a = \frac{4}{5}\left(\sqrt{ag}\right)t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$(Q) \to a = u\cos(90-\alpha)t$$

$$a = \frac{3}{5}ut \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$\boxed{05}$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{4}{5}\left(\sqrt{ag}\right)t = \frac{3}{5}ut \qquad \boxed{05}$$

$$\Rightarrow u = \frac{4}{3}\sqrt{ag}$$

$$(P),\uparrow CA = \sqrt{ag}\,\sin\alpha t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$(Q),\uparrow CB = u\sin\left(90-\alpha\right)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

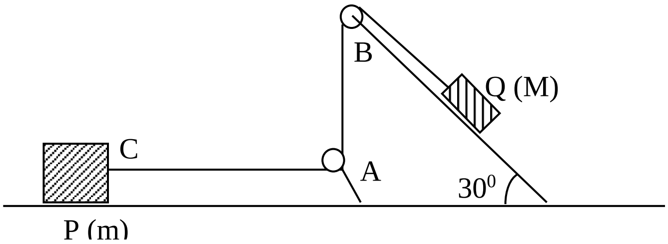
$\boxed{05}$

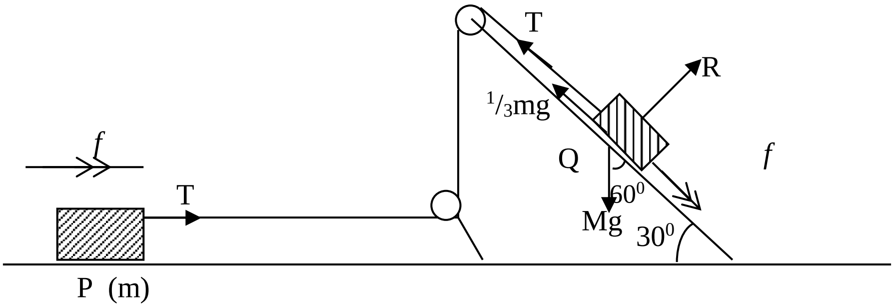
$$(4)-(3) \Rightarrow AB = \left(u\cos\alpha - \sqrt{ag}\,\sin\alpha\right).t$$

$$= \left(\frac{4}{3}\sqrt{ag} \times \frac{4}{5} - \sqrt{ag} \times \frac{3}{5}\right) \times \frac{5a}{4\sqrt{ag}} \qquad \boxed{05}$$

$$AB = \frac{7}{12}a. \qquad \boxed{05}$$

3) முறையே m, M எனும் திணிவுகளை உடைய P,Q எனும் துணிக்கைகள் ஒரு இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் நுனிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை P ஆனது ஒரு ஒப்பமான கிடைமேசை மீது வைக்கப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை துணிக்கை Q ஆனது கிடையுடன் 30^0 இல் உள்ள கரடான சாய்தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. படத்தில் காட்டியவாறு இழையானது மேசை,சாய்தளம் ஆகியவற்றில் நிலைப்படுத்தப்பட்ட சிறிய ஒப்பமான கப்பிகளினூடு செல்கிறது. இழையில் பகுதி AC கிடையாகவும், இழை இறுக்கமாகவும் இருக்க தொகுதி ஓய்வில் இருந்து விடப்படுகிறது. Q வின் இயக்கத்தில் $\frac{1}{3}mg$ பருமனுடைய ஒரு மாறா உராய்விசை தாக்குகின்றது. Q இன் ஆர்முடுகலைக் கண்டு $3M > 2m$ என்பதை **உய்த்தறிக.**





$$\underline{F} = m\underline{a}$$

$$(Q), \searrow Mg\cos 60 - T - \frac{1}{3}mg = Mf \qquad \boxed{10}$$

$$\frac{1}{2}Mg - \frac{1}{3}mg - T = Mf \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$(P), \rightarrow T = mf \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \qquad \boxed{05}$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}M - \frac{1}{3}m\right)g = (M+m)f$$

$$\Rightarrow f = \frac{(3M-2m)}{6(M+m)}g \qquad \boxed{05}$$

$$f > 0$$

$$\Rightarrow f = \frac{(3M-2m)g}{6(M+m)} > 0$$

$$\Rightarrow 3M - 2m > 0$$

$$\Rightarrow 3M > 2m \qquad \boxed{05}$$

4) திணிவு M ஐ உடைய கார் ஒன்று கிடைக்கு α சாய்வுடைய வீதியிலே மேல்நோக்கி u எனும் மாறாக்கதியுடன் செல்கிறது. அக்கார் முன்னர் தொழிற்பட்ட அதே வலுவும், கீழ் நோக்கி 2u எனும் மாறாக்கதியுடன் வருகிறது. முழு இயக்கத்திற்கும் தடை விசை மாறாது எனக் கொண்டு, அவ்விசை 3Mg sinα எனக் காட்டுக.

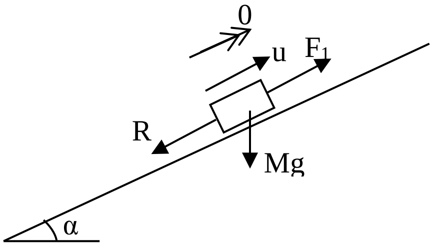
$$\underline{F} = m\underline{a}$$

$$\nearrow \quad F_1 - R - Mg\sin\alpha = M \times 0 \qquad \boxed{05}$$

$$F_1 = R + Mg\sin\alpha ....(1)$$

$$P = F \times V$$

$$H = \left(R + Mg\sin\alpha\right).u ....(2) \quad \boxed{05}$$



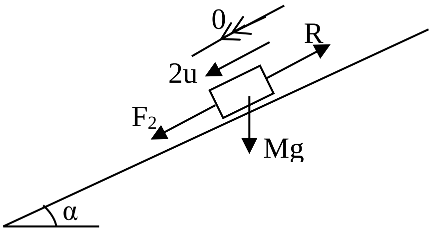
$$\underline{F} = m\underline{a}$$

$$\swarrow \quad F_2 + Mg\sin\alpha - R = M \times 0 \qquad \boxed{05}$$

$$F_2 = R - Mg\sin\alpha ....(3)$$

$$P = F \times V$$

$$H = \left(R - Mg\sin\alpha\right).2u ....(4) \quad \boxed{05}$$



$$(2) = (4) \Rightarrow (R + Mg\sin\alpha)u = (R - Mg\sin\alpha) \times 2u$$

$$R + Mg\sin\alpha = 2R - 2Mg\sin\alpha \qquad \boxed{05}$$

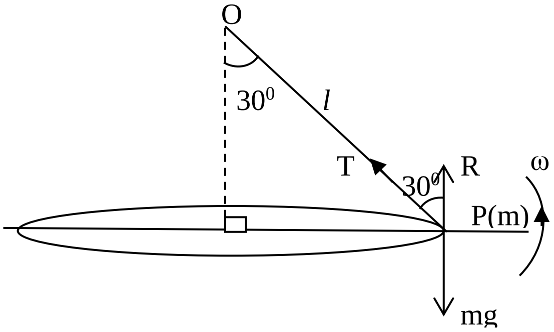
$$3Mg\sin\alpha = R$$

$$R = 3Mg\sin\alpha$$

5) நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடனும் (O) மற்றய நுனி திணிவு m ஐ உடைய துணிக்கை P உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. படத்தில் காட்டியவாறு இழை இறுக்கமாகவும் கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் 30^0 கோணம் அமைக்கவும் இருக்க

துணிக்கை P ஒப்பமான கிடை தளத்துடன் தொடுகை கொள்ள மாறாக் கோணவேகம் ω உடன் கிடைவட்டத்தில் இயங்குகின்றது. மறுதாக்கம் R ஐ ω, m, l, g இல் கணித்து, $\omega^2 < \frac{2g}{\sqrt{3}l}$ என்பதை

உய்த்தறிக. $\omega^2 = \frac{2g}{\sqrt{3}l}$ எனின் யாது கூறுவீர்?



$r = l\sin 30 = l/2$

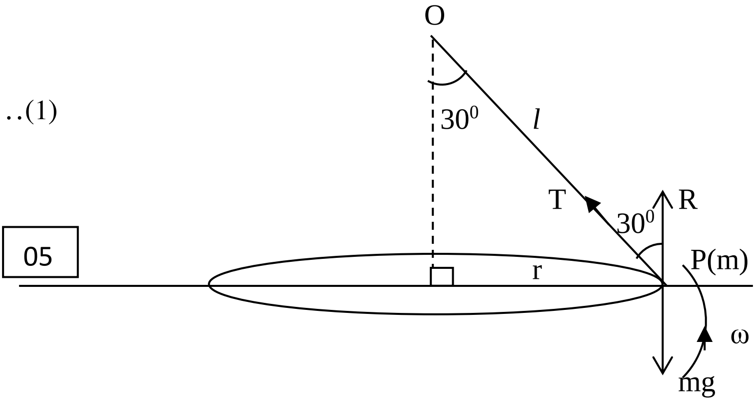
$\uparrow R + T\cos 30 - mg = 0$ $\boxed{05}$

$R = mg - \frac{\sqrt{3}}{2}T$ ……………(1)

$\leftarrow \underline{F} = m\underline{a}$

$T\sin 30 = mr\omega^2 \Rightarrow \frac{1}{2}T = m \times \frac{l}{2}\omega^2$ $\boxed{05}$

$T = ml\omega^2$ ……………(2)



$(1) \Rightarrow R = mg - \frac{\sqrt{3}}{2}ml\omega^2$

$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{2}ml\left(\frac{2g}{\sqrt{3}l} - \omega^2\right)$……………(3) $\boxed{05}$

தளத்துடன் தொடுகை கொள்ள இயங்க R > 0 $\boxed{05}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}ml\left(\frac{2g}{\sqrt{3}l} - \omega^2\right) > 0$

$\Rightarrow \frac{2g}{\sqrt{3}l} - \omega^2 > 0 \Rightarrow \omega^2 < \frac{2g}{\sqrt{3}l}$

$\omega^2 = \frac{2g}{\sqrt{3}l}$ எனின் $(3) \Rightarrow R = 0 \Rightarrow$ துணிக்கை தளத்துடன் மட்டுமட்டாக தொடுகையுடன் இயங்கும். $\boxed{05}$

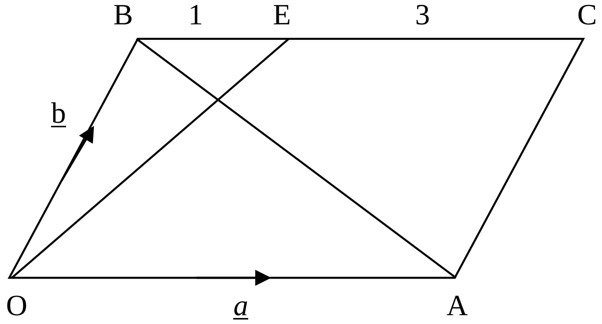
6) O உற்பத்தியாகவிருக்க OACB எனும் இணைகரத்தில் A,B இன் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகும். BC இல் E எனும் புள்ளி $BE : EC = 1 : 3$ ஆகுமாறுள்ளது. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OE}$ ஆகியவற்றை $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகியவற்றில் காண்க. $AB \perp OE$ எனின் $3(\underline{a}.\underline{b}) = 4|b|^2 - |a|^2$ எனக் காட்டுக. $|a| = 2|b|$ எனின் OACB ஒரு செவ்வகம் என **உய்த்தறிக.**

$\Delta OAB \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB} = -\underline{a} + \underline{b}$

$\Delta OBE \Rightarrow \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{OE} = \underline{b} + \frac{1}{4}\underline{a}$ $\boxed{05}$



$AB \perp OE \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OE} = 0$ $\boxed{05}$

$\Rightarrow (-\underline{a} + \underline{b}).\left(\frac{1}{4}\underline{a} + \underline{b}\right) = 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{4}(\underline{a}.\underline{a}) - \underline{a}.\underline{b} + \underline{b}.\left(\frac{1}{4}\underline{a}\right) + \underline{b}.\underline{b} = 0$ $\boxed{05}$

$$\Rightarrow 3(\underline{a}.\underline{b}) = 4|\underline{b}|^2 - |\underline{a}|^2$$

$\underline{a} = 2|\underline{b}|$ எனின் $3(\underline{a}.\underline{b}) = 4|\underline{b}|^2 - 4|\underline{b}|^2$

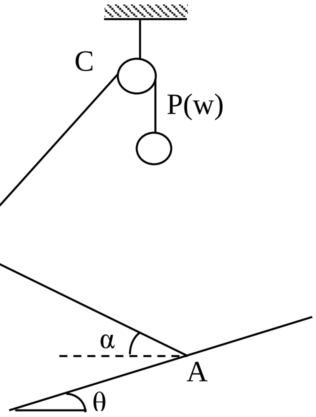
$= 0$ $\boxed{05}$

$\Rightarrow \underline{a}.\underline{b} = 0$

$\Rightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$ $\boxed{05}$

$\therefore\ OA \perp OB \Rightarrow$ செவ்வகம்

7) படத்தில் காட்டியவாறு 4w நிறையுடைய சீரான கோலின் ஒரு முனை A ஆனது ஒப்பமான கிடையுடன் θ கோணசாய்வில் உள்ள சாய்தளத்தில் பொறுத்திருக்க B இல் கட்டப்பட்ட இலேசான நீளா இழை மூலம் சமநிலையில் வைத்திருக்கப்படுகிறது. கோல் கிடையுடன் α கோணம் சாய்வில் இருக்க, இழை கோலிற்கு செங்குத்தாக சென்று C இல் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஒப்பமான சிறு கப்பியினூடு சென்று மறுமுனையில் w நிறையுடைய துணிக்கை P ஐக் காவுகின்றது. $\alpha = 60^0$ எனக் காட்டி, θ ஐக் காண்க.



$(P), \uparrow\ T = w$

$(AB)\ \circlearrowleft A\quad 4w \times a\cos\alpha - T \times 2a = 0$ $\boxed{05}$

$4wa\cos\alpha = 2a \times w$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = 60^0$

ΔABX இல் $\cot-Rule$

$(a+a)\cot(90-\alpha) = a\cot\theta - a\cot\alpha$ $\boxed{10}$

$2\tan\alpha + \cot\alpha = \cot\theta$

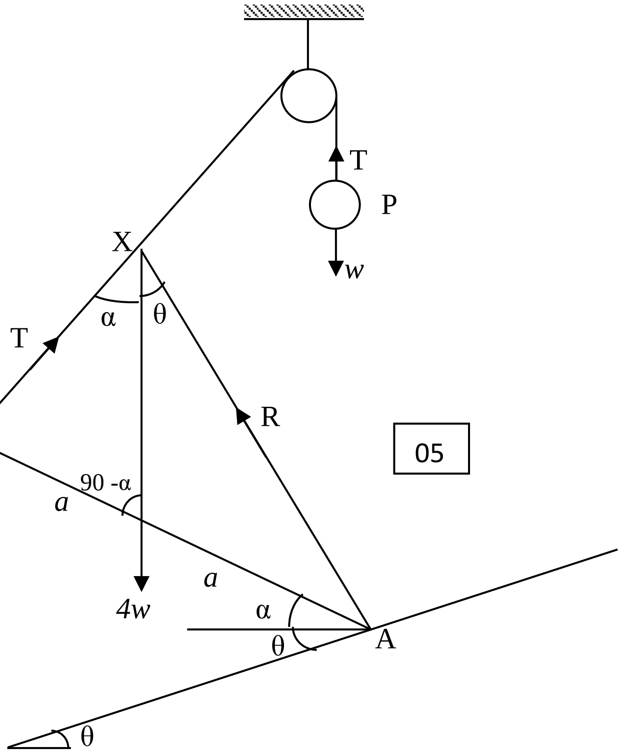
$2\tan 60 + \cot 60 = \cot\theta$

$2\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot\theta$

$\frac{7}{\sqrt{3}} = \cot\theta$

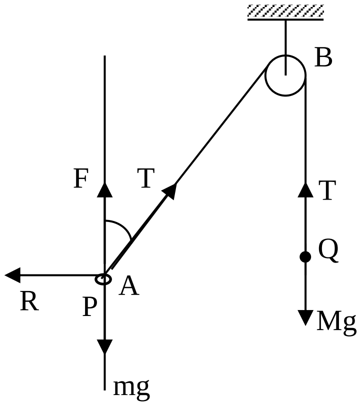
$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{7}$ $\boxed{05}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$



$\boxed{05}$

8) ஒரு இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு முனை கரடான நிலைத்த நிலைக்குத்துக் கம்பி ஒன்றில் கோர்க்கப்பட்டுள்ள m திணிவுடைய சிறிய மணி P உடன் இணைக்கப்பட்டு, இழையானது உருவில் காட்டியவாறு நிலைத்த ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் சென்று மறுமுனை M திணிவுடைய Q எனும் துணிக்கையை காவுகிறது. இழையின் AB எனும் பாகம் நிலைக்குத்துடன் 45^0 இல் இருக்க துணிக்கைகள் சமநிலையில் உள்ளன. உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ எனின் $\frac{2\sqrt{2}m}{3} \le M \le 2\sqrt{2}m$ எனக் காட்டுக.

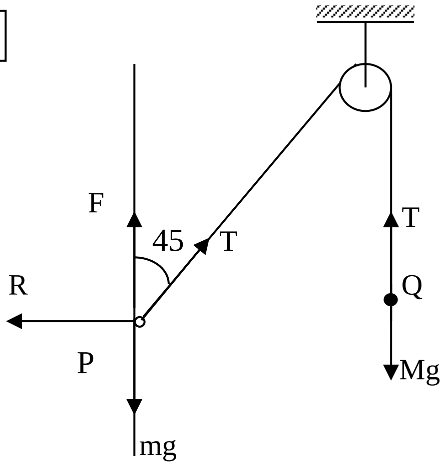


$$(Q), \uparrow T = Mg$$

$$(P), \uparrow F + Tcos45 = mg \Rightarrow F = g\left(m - \frac{M}{\sqrt{2}}\right) \quad \boxed{05}$$

$$\rightarrow T\sin 45 - R = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}Mg \quad \boxed{05}$$

$$F/_R = \frac{\sqrt{2}m - M}{M}$$



சமநிலையில் $\left|F/_R\right| \le \frac{1}{2}$ $\boxed{05}$

$$-\frac{1}{2} \le F/_R \le \frac{1}{2} \quad \boxed{05}$$

$$-\frac{1}{2} \le \frac{\sqrt{2}m - M}{M} \le \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \le \frac{\sqrt{2}m}{M} - 1 \le \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{\sqrt{2}m}{M} \le \frac{3}{2} \quad \boxed{05}$$

$$\Rightarrow 2 \ge \frac{M}{\sqrt{2}m} \ge \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}m}{3} \le M \le 2\sqrt{2}m$$

9) A, B என்பன மாதிரிவெளி ஒன்றில் உள்ள இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க. $P(A \cup B) = 5/_6$, $P(A \cap B') = 1/_6$ எனின் $P(B)$ ஐக் காண்க.

மேலும் A, B என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனவும் தரப்படின் $P(A)$ ஐக் காண்க.

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}, P(A \cap B') = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(B) \quad \boxed{05}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + P(B)$$

$$\frac{2}{3} = P(B) \quad \boxed{05}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \boxed{05}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B) \quad \boxed{05}$$

$\because A, B$ சாராதவை

$$\Rightarrow \frac{5}{6} = P(A) + {}^{2}\!/_{3} - P(A) \times {}^{2}\!/_{3}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}P(A)$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3}P(A)$$

$$\Rightarrow P(A) = {}^{1}\!/_{2} \quad \boxed{05}$$

10) கணிதத்துறையில் உள்ள ஒரு மாணவன் உயர்தர பரீட்சையில் இணைந்தகணிதப் பாடத்தில் பெற்ற Z புள்ளியைவிட இரசாயனவியல், பௌதிகவியல் பாடங்களில் முறையே 0.5,0.3 ஆல் குறைவான Z புள்ளிகளைப் பெற்றான். அவனது மூன்று பாடத்துக்குமான விளைவான Z புள்ளி 1.7 ஆக காணப்படின் பாடங்களிற்கான தனித்தனி Z புள்ளிகளைக் காண்க. இணைந்தகணித பாடப் பரீட்சையின் இடை, நியமவிலகல் என்பன முறையே 45,20 எனின் அக்குறித்த மாணவனின் இணைந்த கணித புள்ளி யாது?

இணைந்த கணித புள்ளி Z என்க.

$$\frac{Z_{mat} + Z_{che} + Z_{phy}}{3} = 1.7$$

$$\frac{Z + (Z - 0.5) + (Z - 0.3)}{3} = 1.7 \quad \boxed{05}$$

$$3Z = 5.1 + 0.8$$

$$3Z = 5.9$$

$$Z = 1.9 \quad \boxed{05}$$

இணைந்த கணிதம் = 1.9

இரசாயனவியல் = 1.9 – 0.5 = 1.4 $\boxed{05}$

பௌதிகவியல் = 1.9 – 0.3 = 1.6

இணைந்தகணிதம்

$$Z = \frac{x - \overline{x}}{\sigma} \quad \boxed{05}$$

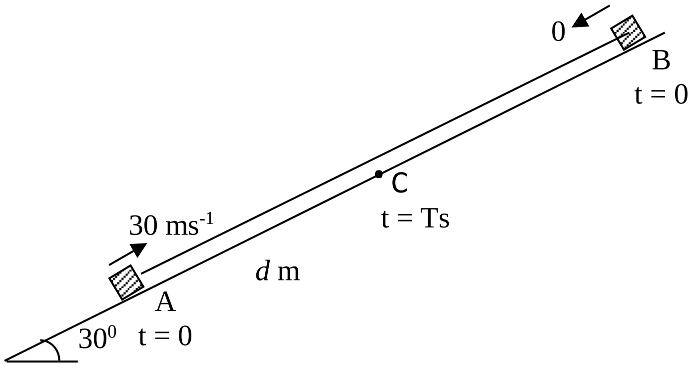
$$1.9 = \frac{x - 45}{20}$$

$$\Rightarrow x = 83 \quad \boxed{05}$$

Part-B

11)

a)



மலைப்பிரதேசத்தில் உள்ள கரடான கிடையுடன் 30^0 இல் சாய்ந்த வீதியொன்றில் A,B எனும் நேர்கோடு ஒன்றில் உள்ள புள்ளிகள் AB =d m ஆகுமாறுள்ளன. m திணிவுள்ள கல்லொன்று A இல் இருந்து AB வழியே மேல்நோக்கி $30ms^{-1}$ உடன் வீசப்படுகிறது. அது வீதியில் AB வழியே $\frac{mg}{4}$ N எனும் உராய்வு தடைவிசைககெதிராக இயங்கி புள்ளி C இல் கணநிலை ஓய்விற்கு t=Ts இல் வருகிறது. $t=0$ இல் B இல் ஓய்வில் இருந்து புறப்படும் ஒரு வண்டி 2s இற்கு சீரான ஆர்முடுகலுடன் BA வழியே கீழ் நோக்கி இயங்கி $30ms^{-1}$ எனும் வேகத்தை அடைந்ததும் $t_0\ s$ இற்கு மாறா வேகத்துடன் சென்று இறுதியில் சீரான அமர்முடுகலுடன் சென்று C இல் கல் ஓய்விற்கு வரும் அதேநேரத்தில் C இல் ஓய்விற்கு வருகிறது. $g=10ms^{-2}$ எனக் கொண்டு கல்லின் அமர்முடுகல் $\frac{15}{2}ms^{-2}$ எனக் காட்டி இரண்டினதும் C வரையான இயக்கத்திற்கான வேக – நேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. **இதிலிருந்து**.

i) $T=4$ எனக் காட்டுக.

ii) $d=15t_0+120$ எனக்காட்டி $120<d<150$ என **உய்த்தறிக**.

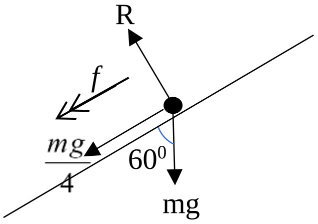
iii) $d=135$ எனின் வண்டியின் அமர்முடுகலைக் காண்க.

கல்லிற்கு, $\underline{F}=m\underline{a}$

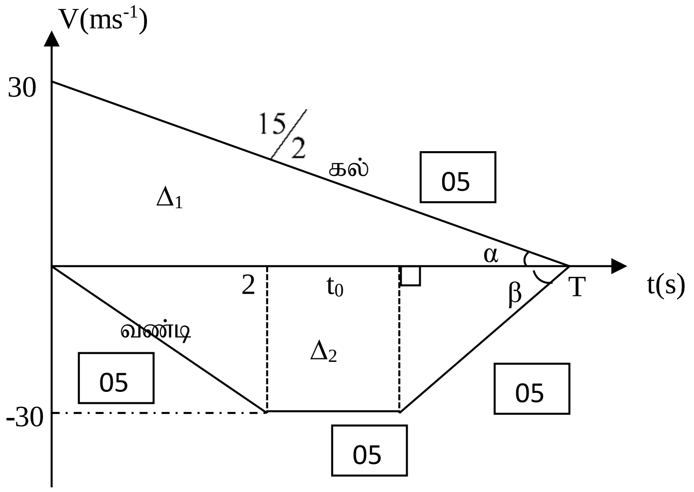
$$\swarrow mg\cos 60+\frac{mg}{4}=mf$$

$$\Rightarrow f=\frac{3g}{4}=\frac{3}{4}\times 10=\frac{15}{2}ms^{-2}$$

05



05



$\boxed{20}$

i. $\tan\alpha = \dfrac{15}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{30}{T} = \dfrac{15}{2}$ $\boxed{05}$

$\Rightarrow T = 4$

$\boxed{05}$

ii. $AC + BC = d$ $\boxed{05}$

$\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 = d$

$\frac{1}{2} \times T \times 30 + \frac{1}{2}(T + to) \times 30 = d$

$\boxed{05}$ $\boxed{05}$

$\Rightarrow d = 15t_0 + 120$

$0 < t_0 < T - 2$ $\boxed{05}$

$\Rightarrow 0 < t_0 < 2$

$\Rightarrow 0 < 15t_0 < 30$ $\boxed{05}$

$\Rightarrow 120 < 15t_0 + 120 < 30 + 120$

$\Rightarrow 120 < d < 150$

$\boxed{25}$

iii. $d = 15t_0 + 120$

$d = 135 \Rightarrow 135 = 15t_0 + 120 \Rightarrow 15 = 15t_0 \Rightarrow t_0 = 1$ $\boxed{05}$

வண்டியின் அமர்முடுகல் $F = \tan\beta$

$$= \frac{30}{T - (2 + t_0)}$$ $\boxed{05}$

$$= \frac{30}{1} \Rightarrow F = 30ms^{-2}$$ $\boxed{05}$

$\boxed{15}$

b) P எனும் கப்பல் வடக்கு நோக்கி புவி தொடர்பாக $40ms^{-1}$ உடன் செல்லும் அதே வேளை வேறொரு கப்பல் Q ஆனது கிழக்கு நோக்கி புவி தொடர்பாக ums^{-1} கதியுடன் செல்கிறது. ஒரு மூன்றாவது கப்பல் R ஆனது P இலிருந்து அவதானிக்கப்படும் போது கிழக்கிற்கு $60°$ வடக்கு திசையில் செல்வதாக தோற்றுகின்ற அதேவேளை கப்பல் R ஆனது Q இல் இருந்து அவதானிக்கப்படும் போது வடக்கு நோக்கி $70ms^{-1}$ உடன் செல்வதாக தோற்றுகின்றது. u இன் பெறுமானத்தை கண்டு, கப்பல் R இன் வேகம் $20\sqrt{13}ms^{-1}$ உடன் கிழக்கிற்கு $\tan^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)$ வடக்கு திசையில் செல்கிறது எனக் காட்டுக.

ஆரம்பத்தில் கப்பல் P ஆனது கப்பல் R இல் இருந்து வடக்கே $15\,km$ தூரத்திலும், Q இல் இருந்து மேற்கே $\frac{5\sqrt{3}}{4}km$ தூரத்திலும் இருக்கிறது எனத்தரப்படின் P உம் R உம் மிகக்குறுகிய இடைத்தூரத்தில் இருக்கும் போது P இற்கும் Q இற்கும் இடையில் உள்ளதூரம் $10\sqrt{3}km$ எனக் காட்டுக.

$V_{P,E} = \uparrow 40, \qquad V_{Q,E} = \rightarrow u$

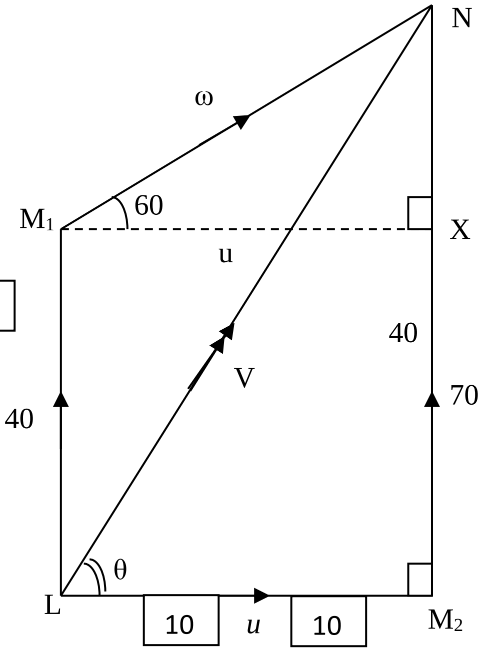
$V_{R,P} = \nearrow 60^0 \qquad V_{R,Q} = \uparrow 70 \qquad \boxed{10}$

$V_{R,E} = V$ என்க.

சார்பு வேக கோட்பாடு

$V_{R,E} = V_{R,P} + V_{P,E} \Rightarrow V = \nearrow 60^0 \;\; + \uparrow 40$

$V_{R,E} = V_{R,Q} + V_{Q,E} \Rightarrow V = \uparrow 70 + \rightarrow u \quad \boxed{05} \quad \boxed{05}$



$\Delta M_1NX \Rightarrow \cot 60 = \frac{u}{30}$

$u = 10\sqrt{3}ms^{-1} \quad \boxed{05}$

$\Delta LM_2N \Rightarrow V^2 = u^2 + 70^2$

$= 300 + 4900$

$V^2 = 5200$

$V = 20\sqrt{13}ms^{-1} \quad \boxed{05}$

$\tan\theta = \frac{70}{u} = \frac{70}{10\sqrt{3}} \quad \boxed{05}$

$\tan\theta = \frac{7}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)$

$\boxed{55}$

$V_{R,P} = \overset{\omega}{\nearrow} 60^0$ என்க.

$\Delta M_1NX \Rightarrow \omega = \sqrt{u^2 + 30^2}$

$= \sqrt{300 + 900}$

$= \sqrt{1200} \quad \boxed{05}$

$\omega = 20\sqrt{3}ms^{-1}$

P இன் சட்டம்

P இற்கு கிட்ட R வர

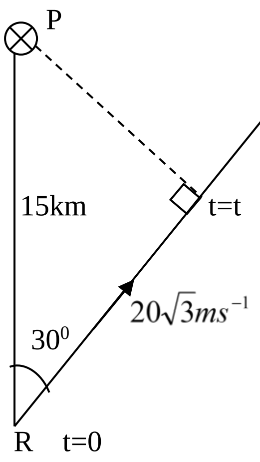
எடுக்கும் நேரம் $t = \dfrac{15\cos 30 \times 1000}{20\sqrt{3}}$

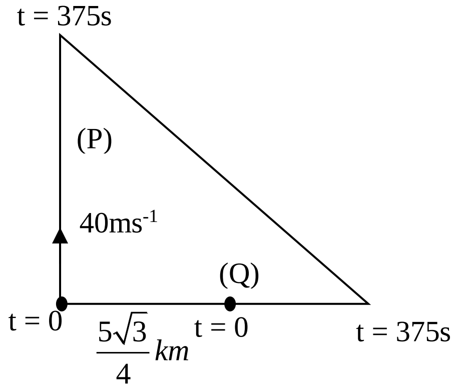
$t = 375\sec$ $\boxed{05}$

இன் நேரத்தில் Q சென்ற

தூரம் $= \dfrac{10\sqrt{3} \times 375}{1000} km$ $\boxed{05}$

$= \dfrac{15\sqrt{3}}{4} km$





P சென்ற தூரம் $= \dfrac{40 \times 375}{1000} km$

$= 15km$ $\boxed{05}$

P இற்கும் Q இற்கும்

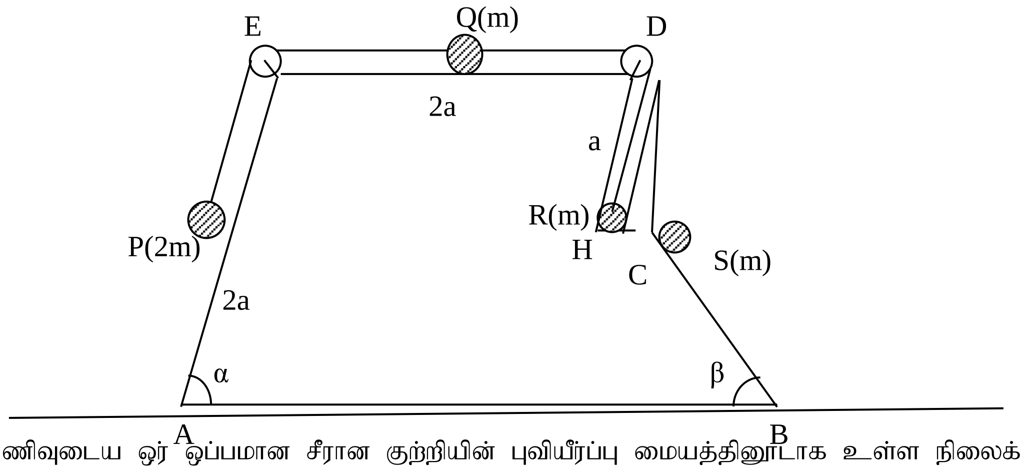
இடையில் தூரம். $= \sqrt{15^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2} = 10\sqrt{3}km$

$\boxed{05}$

$\boxed{25}$

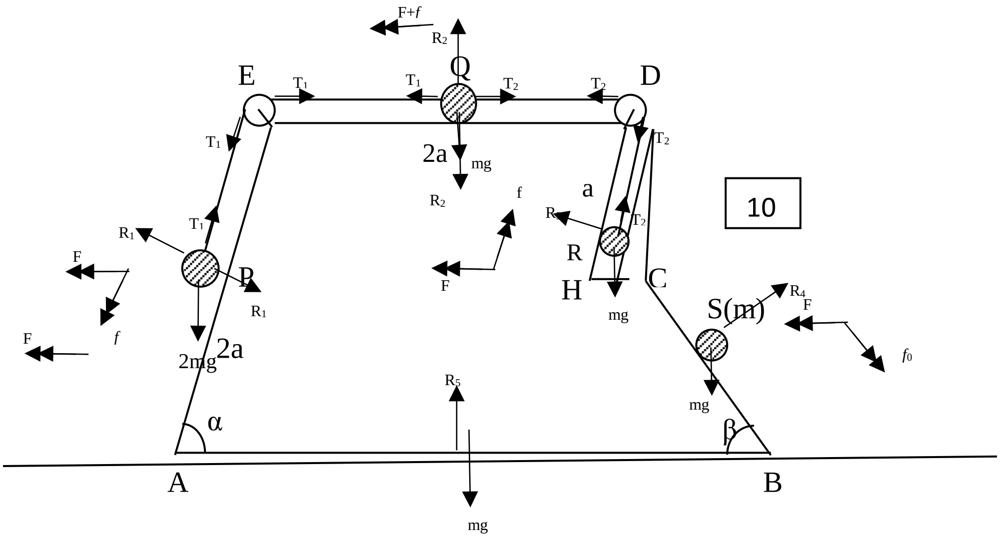
12)

a)



m திணிவுடைய ஓர் ஒப்பமான சீரான குற்றியின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாக உள்ள நிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டு ABCDE ஐ உரு காட்டுகிறது. AB கொண்ட முகம் ஒப்பமான கிடைநிலத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. AE உம் BC உம் அவற்றைக் கொண்டுள்ள முகங்களின் அதியுயர் சரிவுக்கோடுகளாகும். AE இற்கு சமாந்தரமாக D இல் ஒடுக்கமான ஒப்பமான துவாரம் துளைக்கப்பட்டுள்ளது. அத்துடன் AE = ED = 2a, HD =a, P(2m), Q(m) திணிவுகளை உடைய துணிக்கைகள் முறையே AE,ED என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளிலும், R(m) திணிவுடைய துணிக்கை துவாரத்தில் H இலும் S(m) திணிவுடைய துணிக்கை BC இல் C இல் வைக்கப்பட்டுள்ளன. P,Q ஆகிய துணிக்கைகள் E இல் குற்றியில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒப்பமான இலேசான சிறிய

கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஒரு இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் நுனிகளுடனும் Q,R ஆகிய துணிக்கைகள் குற்றியில் D இல் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஒப்பமான இலேசான சிறிய கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் வேறோர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் நுனிகளுடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு இழைகள் இறுக்கமாக இருக்கும் அதே வேளை இந்த அமைவில் தொகுதி ஓய்வில் இருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. துணிக்கை R ஆனது D ஐ அடைய எடுக்கும் நேரத்தை துணிவதற்கு போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக. (துணிக்கை R ஆனது D ஐ அடையும் போது துணிக்கை S குற்றியை விட்டு வெளியேறவில்லை எனக் கொள்க)



$\boxed{10}$

$a_{P,X} = \swarrow f$ எனின் $a_{\theta,X} = \leftarrow f, a_{R,X} = \nearrow f$ ஆகும். $a_{S,X} = \searrow f_0, a_{X,E} = F$ $\boxed{05}$ $\boxed{05}$

$\underline{F} = m\underline{a}$

(P) $\swarrow 2mg\sin\alpha - T_1 = 2m(f + F\cos\alpha)$ ....(1) $\boxed{10}$

(Q) $\leftarrow T_1 - T_2 = m(f + F)$ ....(2) $\boxed{10}$

(R) $\nearrow T_2 - mg\sin\alpha = m(f - F\cos\alpha)$ ....(3) $\boxed{10}$

(S) $\searrow mg\sin\alpha = m(f_0 - F\cos\beta)$ ....(4) $\boxed{10}$

தொகுதி $\leftarrow 0 = mF + 2m(F + f\cos\alpha) + m(f + F)$

$+m(F - f\cos\alpha) + m(F - f_0\cos\beta)$ $\boxed{15}$

குற்றியின் சட்டத்தில்

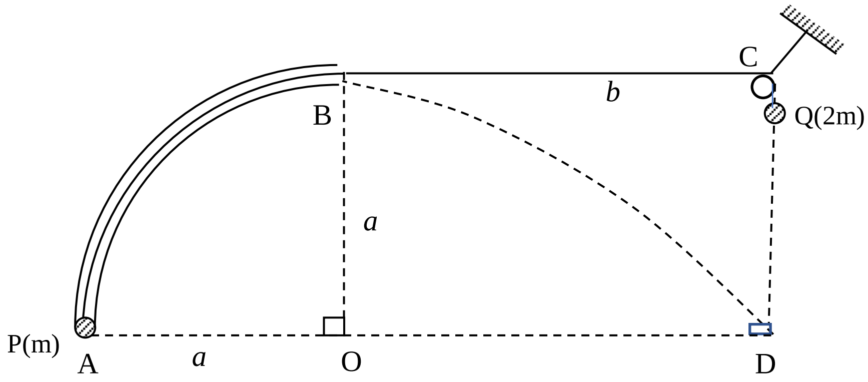
(R), $\nearrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$a = 0 + \frac{1}{2}ft^2$ $\boxed{05}$

$t = \sqrt{\frac{2a}{f}}$

$\boxed{80}$

b)

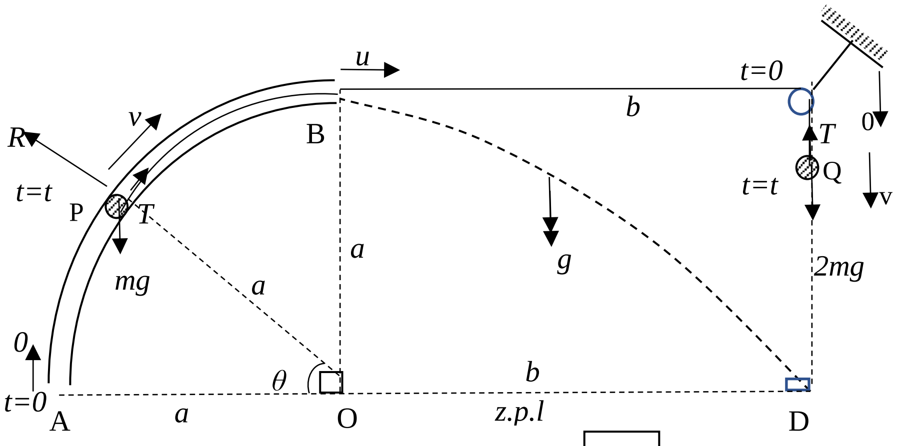


மையம் O ஐயும் ஆரை a ஐயும் உடைய ஒப்பமான கால் வட்டக்குழாய் நிலைக்குத்து தளமொன்றில் அதன் எல்லை ஆரைகள் OA,OB என்பன முறையே கிடை நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. குழாயினூடும் C இல் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஒப்பமான கப்பியினூடும் செல்லும் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு முனையில் m திணிவுடைய P எனும் துணிக்கையும், மற்றய முனையில் 2m திணிவுடைய Q எனும் துணிக்கையும் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவில் காட்டியவாறு ஆரம்பத்தில் துணிக்கை P குழாயினுள்ளே A இலும் துணிக்கை Q ஆனது கப்பி C இற்கு அருகிலும் இருக்குமாறு இழை இறுக்கமாகவும் (B இன் மட்டத்தில் *b* தூரத்தில் கப்பி C இருக்கவும்) இருக்க ஓய்வில் இருந்து விடப்படுகின்றன. OP ஆனது கிடையுடன் θ கோணத்தை $\left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ அமைக்கும் போது துணிக்கை P இன் கதி v ஆனது

$v^2 = \dfrac{2}{3}ag\left(2\theta - \sin\theta\right)$ ஆல் தரப்படும் எனக் காட்டி, இழையில் உள்ள இழுவிசையைக் காண்க.

துணிக்கை P ஆனது B ஐ அடையும் போது P இன் கதியைக் காண்க.

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ஆக இருக்கும் போது இழை வெட்டப்படுகிறது. தொடரும் P இன் புவியீர்ப்பின் கீழ் இயக்கத்தில் அது புள்ளி D இனூடு செல்லின் $b = 2\sqrt{\dfrac{\pi - 1}{3}}a$ எனக் காட்டுக.



$\boxed{05}$

சக்திகாப்பு விதிப்படி

$$2mga = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\times 2m \times v^2 + mga\sin\theta + 2mg(a - a\theta) \quad \boxed{25}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2}{3}ag(2\theta - \sin\theta)....................(1) \quad \boxed{05}$$

$\underline{F} = m\underline{a}$

(P) $\nearrow\ T - mg\cos\theta = mf$ …………..(2) $\boxed{05}$

(Q), $\downarrow\ 2mg - T = 2mf$ …………..(3) $\boxed{05}$

$$\frac{(2)}{(3)} \Rightarrow \frac{T - mg\cos\theta}{2mg - T} = \frac{1}{2} \quad \text{…………..(5)} \quad \boxed{05}$$

$$\Rightarrow T = {}^{2}\!/_{3}\, mg(1+\cos\theta)$$

$\boxed{50}$

$\theta = {}^{\pi}\!/_{2}$ இல் $v = u$ என்க.

$$(1) \Rightarrow u^2 = {}^{2}\!/_{3}\, ag(2\times {}^{\pi}\!/_{2} - \sin {}^{\pi}\!/_{2})$$

$$u^2 = {}^{2}\!/_{3}\, ag(\pi - 1) \quad \boxed{05}$$

$$(B \to D), s = ut + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$\downarrow a = 0 + \frac{1}{2}gt^2 \quad \boxed{05}$$

$$\sqrt{\frac{2a}{g}} = t$$

$$\to b = ut + 0 \quad \boxed{05}$$

$$b^2 = u^2t^2$$

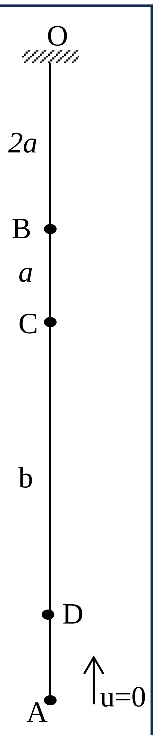
$$b^2 = \frac{2}{3}ag(\pi - 1)\times\frac{2a}{g} \quad \boxed{05}$$

$$b = 2\sqrt{\frac{\pi - 1}{3}a}$$

$\boxed{20}$

---

13) இயற்கை நீளம் 2a ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு 2mg ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி ஒப்பமான சீலிங்கில் உள்ள புள்ளி O இற்கு இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை மற்றய நுனியில் m திணிவுடைய துணிக்கை P இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஆரம்பத்தில் O இற்கு நிலைக்குத்தாக கீழே உள்ள புள்ளி A இல் பிடிக்கப்பட்டு ஓய்வில் இருந்து விடப்படுகிறது. இங்கு $OA = 3a + b; b > a$ ஆகுமாறுள்ளது. அத்துடன் B,C ஆகிய புள்ளிகள் $OB = 2a, BC = a$ ஆகுமாறு உள்ளன.



P இன் இயக்கச்சமன்பாடு $\ddot{x} = -\omega^2 x$ எனக்காட்டுக. இங்கு $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ உம் $CP = x$ உம் ஆகும். c வீச்சமாக இருக்கும் சூத்திரம் $\dot{x}^2 = \omega^2(c^2 - x^2)$ ஐப் பயன்படுத்தி P இன் மேல்நோக்கிய இயக்கத்தில் B இல் கதியைக் கண்டு $b > \sqrt{5}a$ எனின் துணிக்கை P சீலிங்கை அடிக்கும் எனக் காட்டுக.

$b = 3a$ எனின் துணிக்கை P சீலிங்கை அடிக்கும் கதியைக் காண்க. பின் துணிக்கை P இன் கீழ் நோக்கிய இயக்கத்தில் புள்ளி B ஐ கீழ்நோக்கி $2\sqrt{(e^2+1)ag}$ எனும் கதியுடன் கடக்கும் எனக் காட்டுக.

இங்கு e ஆனது P இற்கும் சீலிங்கிற்கும் இடையில் உள்ள மீள்தன்மைக்குணகமாகும்.

$e \le \frac{\sqrt{5}}{4}$ எனின் துணிக்கை P இன் கீழ் நோக்கிய எளிமையிசை இயக்கத்தில் புள்ளி D இல் அல்லது அதற்கு மேல் முதல் முதலில் கணநிலை ஓய்விற்கு வரும் எனக்காட்டுக. இங்கு $CD=\frac{5}{2}a$ ஆகும்.

$e = \frac{\sqrt{5}}{4}$ எனின் துணிக்கை P இன் A இல் இருந்தான இயக்கத்தில் இருந்து முதல் முதல் கணநிலை ஓய்விற்கு வரும் இயக்கம் வரையுள்ள **எளிமையிசை இயக்க** மொத்த நேரம் $\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{2\pi-\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right\}$ எனக்காட்டுக.

Hooke's Law

$$T=\frac{2mg(a+x)}{2a} \quad \boxed{05}$$

$$T=\frac{mg}{a}(a+x)$$

$$\underline{F}=m\underline{a}$$

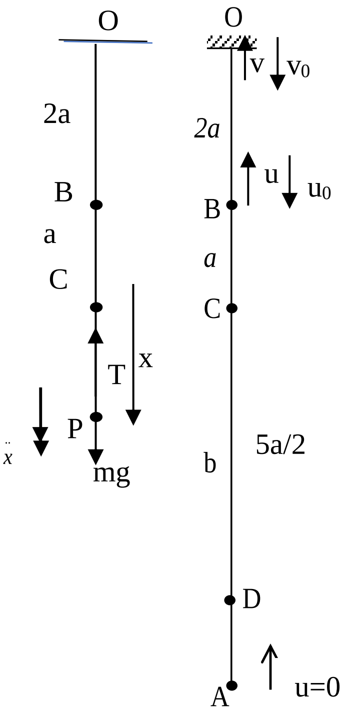
$$\downarrow mg-T=m\ddot{x} \quad \boxed{15}$$

$$m\ddot{x}=mg-\frac{mg}{a}(a+x)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}=-\frac{g}{a}x$$

$$\ddot{x}=-\omega^2 x;\omega^2={}^{g}\!/_{a} \Rightarrow \omega=\sqrt{{}^{g}\!/_{a}}$$

$\boxed{05}$



∴ S.H.M

$x=0$ இல் அலைவு மையம் இருக்கும் அதாவது C அலைவுமையம். $\boxed{05}$

∴ வீச்சம் = b = c $\boxed{05}$

$\boxed{35}$

$$\dot{x}^2=\omega^2\left(c^2-x^2\right)$$

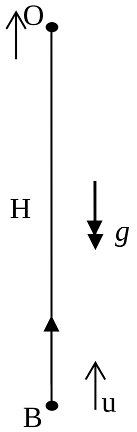
$$\dot{x}^2={}^{g}\!/_{a}\left(b^2-x^2\right)$$

$x=-a$ இல் $\dot{x}=-u$

$$(-u)^2={}^{g}\!/_{a}\left[b^2-(-a)^2\right] \quad \boxed{05}$$

$$u^2={}^{g}\!/_{a}\left[b^2-a^2\right]$$

$$u=\sqrt{{}^{g}\!/_{a}\left(b^2-a^2\right)} \quad ……………(1) \quad \boxed{05}$$



புவியீர்ப்பின் கீழ் இயக்கத்தில்

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$\uparrow 0 = u^2 - 2gH \quad \boxed{05}$$

$$2gH = {}^{g}\!/_{a}\left(b^2 - a^2\right)$$

$$H = {}^{1}\!/_{2a}\left(b^2 - a^2\right) \quad \boxed{05}$$

$H > 2a$ எனின் P ஆனது சீலிங்கை அடிக்கும். $\boxed{10}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2a}\left(b^2 - a^2\right) > 2a$$

$$\Leftrightarrow b^2 > 5a^2 \quad \boxed{05}$$

$$\Leftrightarrow b > \sqrt{5}a$$

$\therefore b > \sqrt{5}a$ எனின் P ஆனது சீலிங்கை அடிக்கும். $\boxed{35}$

$b = 3a$ எனின்

$$(1) \Rightarrow u = \sqrt{{}^{g}\!/_{a}\left(9a^2 - a^2\right)}$$

$$\Rightarrow u = 2\sqrt{2ag} \quad \boxed{05}$$

வீச்சம் c = b = 3a $\boxed{05}$

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$(B \to 0), \uparrow v^2 = u^2 - 2g \times 2a$$

$$= 8ag - 4ag$$

$$v = 2\sqrt{ag} \quad \boxed{05}$$

$$v_0 = ev$$

$$v_0 = 2e\sqrt{ag} \quad \boxed{05}$$

$$(B \to O), \downarrow v^2 = u^2 + 2as$$

$$u_0^2 = v_0^2 + 2g \times 2a$$

$$= 4e^2ag + 4ag \quad \boxed{05}$$

$$u_0 = 2\sqrt{\left(e^2 + 1\right)ag}$$

$\boxed{25}$

$\dot{x}^2 = \omega^2\left(c_0{}^2 - x^2\right)$, இங்கு c_0 கீழ்நோக்கி ω இயக்கத்தில் வீச்சம்.

$x = -a$ இல் $\dot{x} = u_0$

$$u_0^2 = \omega^2\left[c_0^2 - (-a)^2\right] \quad \boxed{05}$$

$$A(e^2 + 1)ag = {}^{g}\!/_{a}\left(c_0^2 - a^2\right)$$

$$Aa^2(e^2 + 1) + a^2 = c_0^2$$

$$c_0 = \sqrt{(4e^2 + 5)a} \quad \boxed{05}$$

$$e \le \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow e^2 \le \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow 4e^2 \le \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 4e^2 + 5 \le \frac{5}{4} + 5 = \frac{25}{4} \quad \boxed{05}$$

$$\Leftrightarrow 4e^2 + 5 \le \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4e^2 + 5} \le \frac{5}{2} \quad \boxed{05}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4e^2 + 5}a \le \frac{5a}{2}$$

$$\Leftrightarrow c_0 \le \frac{5a}{2} = CD \quad \boxed{05}$$

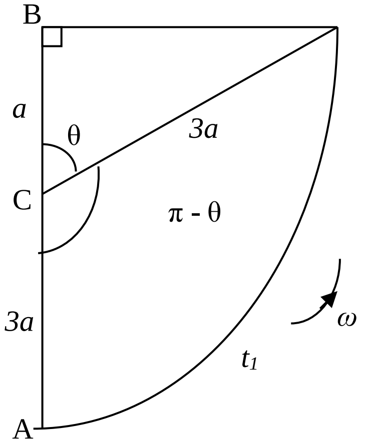
$\therefore e \le \frac{\sqrt{5}}{4}$ எனின் P, D இல் அல்லது அதற்கு முன் முதன் முதல் கணநிலை ஓய்விற்கு வரும் $\boxed{25}$

$e = \sqrt{5}/4$ எனில்

$$c_0 = \left(\sqrt{4e^2 + 5}\right)a$$

$$c_0 = \frac{5a}{2} \quad \boxed{05}$$

$(A \rightarrow B)$ இயங்க நேரம் t. என்க.



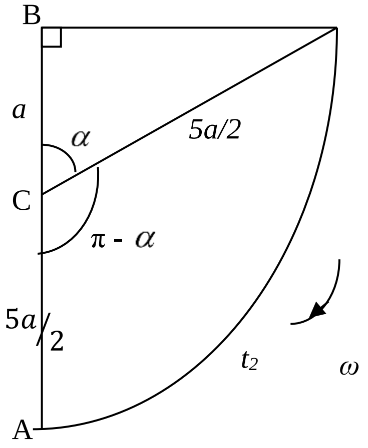
$$\cos\theta = \frac{a}{3a}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$t_1 = \frac{\pi - \theta}{\omega}$$

$$t_1 = \sqrt{a/g}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right] \quad \boxed{10}$$

$(B \rightarrow D)$ இயங்க நேரம் t_2 என்க.



$$\cos\alpha = \frac{a}{5a/2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$t_2 = \frac{\pi - \alpha}{\omega}$$

$$t_2 = \sqrt{a/g}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right] \quad \boxed{10}$$

$$\therefore t_1 + t_2 = \sqrt{a/g}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right] + \sqrt{a/g}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right] \quad \boxed{05}$$

$$t_1 + t_2 = \sqrt{a/g}\left[2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right]$$

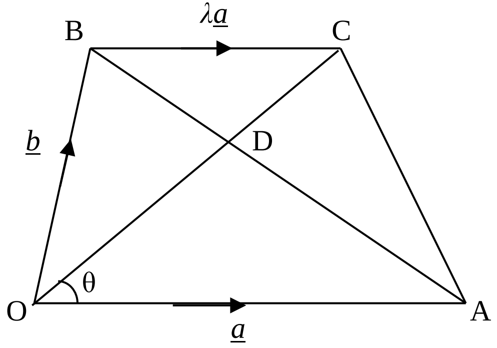
$\boxed{30}$

---

14)

a) உற்பத்தி O குறித்து A,B என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a},\underline{b}$ ஆகும். இங்கு $\underline{a},\underline{b}$ என்பன பூச்சியமல்லாத, சமாந்தரமற்ற காவிகளாகும். புள்ளி C ஆனது $\overrightarrow{BC}=\lambda\underline{a}$ ஆகுமாறு தெரியப்படுகிறது. இங்கு $\lambda>0$ ஆகும் OC இனதும் AB இனதும் வெட்டுப்புள்ளி D ஆக இருக்கும் அதேவேளை $\overrightarrow{OD}=\mu\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{AD}=\gamma\overrightarrow{AB}$ ஆகுமாறும் உள்ளன. இங்கு $\mu,\gamma\in R.$ ΔOAD இற்கு முக்கோண காவிக்கூட்டலை உபயோகித்து, அதன் மூலம் λ,μ,γ இற்கிடையில் தொடர்புகளைப் பெறுக.

மேலும் $\underline{a}=2\underline{i},\ \underline{b}=-3\underline{i}+4\underline{j}$ எனவும் $A\hat{O}C=\theta$ எனவும் தரப்படுகிறது. இங்கு $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ ஆகும். $\lambda=3$ எனக் காட்டி μ,γ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.



$\Delta OAB\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB}=-\underline{a}+\underline{b}$ $\boxed{05}$

$\Delta OBC\Rightarrow\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$

$=\underline{b}+\lambda\underline{a}$ $\boxed{05}$

$\overrightarrow{OC}=\lambda\underline{a}+\underline{b}$

$\overrightarrow{OD}=\mu\overrightarrow{OC},\overrightarrow{AD}=\gamma\overrightarrow{AB}$ $\boxed{05}$

$\Delta OAD\Rightarrow\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$

$\mu\overrightarrow{OC}=\underline{a}+\gamma\overrightarrow{AB}$

$\mu(\lambda\underline{a}+\underline{b})=\underline{a}+\gamma(-\underline{a}+\underline{b})$

$(\lambda\mu+\gamma-1)\underline{a}+(\mu-\gamma)\underline{b}=\underline{0}$ $\boxed{05}$

$But\,\underline{a}\nparallel\underline{b}$

$\lambda\mu+\gamma=1$ ....(1) $\boxed{05}$

$\mu-\gamma=0$

$\mu=\gamma$ ....(2) $\boxed{05}$

$\boxed{30}$

$\underline{a}=2\underline{i},,\underline{b}=-3\underline{i}+4\underline{j}$

$\overrightarrow{OA}=2\underline{i}$

$\Rightarrow|\overrightarrow{OA}|=2$

$\overrightarrow{OC}=\lambda\underline{a}+\underline{b}$

$=2\lambda\underline{i}+(-3\underline{i}+4\underline{j})$

$\overrightarrow{OC}=(2\lambda-3)\underline{i}+4\underline{j}$

$\Rightarrow|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(2\lambda-3)^2+16}$ $\boxed{05}$

$But\,\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\theta$ $\boxed{05}$

$$2\underline{i}.\left[(2\lambda-3)\underline{i}+4\underline{j}\right]=2\sqrt{(2\lambda-3)^2+16}\times\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 2.(2\lambda-3)=2\times\frac{3}{5}\sqrt{(2\lambda-3)^2+16}$$

$$5.(2\lambda-3)=3\sqrt{(2\lambda-3)^2+16}$$

$$\Rightarrow 25.(2\lambda-3)^2=9\left[(2\lambda-3)^2+16\right] \quad \boxed{05}$$

$$16(2\lambda-3)^2=9\times16$$

$$(2\lambda-3)^2=9$$

$$2\lambda-3=\pm3 \quad \boxed{05}$$

$$(+)\Rightarrow\lambda=3$$

$$(-)\Rightarrow\lambda=0\rightarrow Not\ \ possible$$

$$\therefore\lambda=3$$

$$(1)\Rightarrow3\mu+\gamma=1$$

$$\mu=\gamma=\frac{1}{4} \quad \boxed{05} \quad \boxed{05}$$

$\boxed{30}$

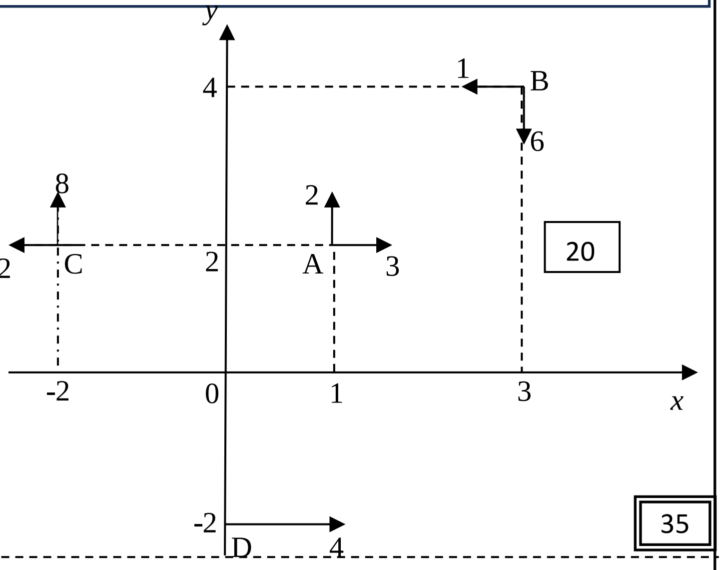
---

b) $\underline{i}+2\underline{j},3\underline{i}+4\underline{j},-2\underline{i}+2\underline{j},-2\underline{j}$ என்பவற்றை தானக்காவிகளாக உடைய முறையே A,B,C,D எனும் புள்ளிகளில் முறையே $3\underline{i}+2\underline{j},-\underline{i}-6\underline{j},-2\underline{i}+8\underline{j},4\underline{i}$ எனும் விசைகள் தாக்குகின்றன. உரிய பிரயோகப்புள்ளிகளை தெளிவாக்காட்டி இவ்விசைகளை கூறுவடிவத்தில் x-y தளத்தில் குறித்து காட்டுக. இந் நான்கு விசைகளின் விளையுளின் பருமன் $R=4\sqrt{2}$ எனக்காட்டி, அதன் திசையை காண்க.

இதன் தாக்கக்கோடு $x-$ அச்சை வெட்டும் புள்ளி E ஐக் கண்டு, அதன் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இப்போது $\alpha i,\alpha\underline{i}+\alpha\underline{j}$ என்பவற்றை தானக்காவிகளாக உடைய புள்ளிகள் முறையே F,G இல் முறையே $-P\underline{i}-2P\underline{j},P\underline{j}$ எனும் மேலதிக இரு விசைகள் சேர்க்கப்படுகின்றன. இவ்விரு விசைகளின் விளையுள் R இற்கு சமாந்தரமாகும் எனக் காட்டுக.

இப்போது தொகுதி 32Nm பருமனுள்ள இடஞ்சுழி போக்கில் உள்ள இணையிற்கு சமவலுவானதெனின், P,α இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

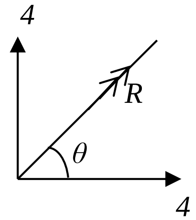


$\boxed{20}$

$$\rightarrow X=3-1-2+4=4 \quad \boxed{05}$$

$$\uparrow Y=2-6+8=4 \quad \boxed{05}$$

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}$$



$$R=4\sqrt{2}N$$

$$\tan\theta={}^4\!/_4=1\Rightarrow\theta=45^0 \quad \boxed{05}$$

$\boxed{35}$

↺ O $\quad G = (2\times1) - (3\times2) + (1\times4) - (6\times3) + (2\times2) - (8\times2) + (4\times2)$ $\boxed{10}$

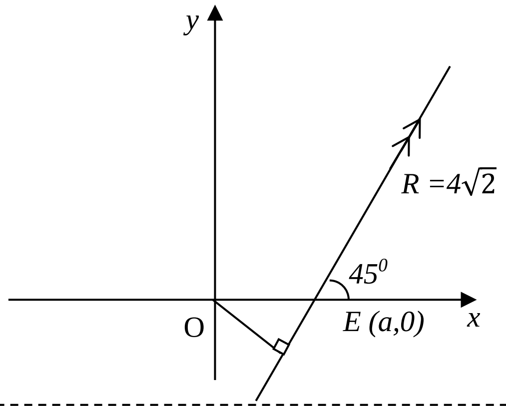
$= -22$

↺ O , $R\times a\sin 45 = -22$ $\boxed{05}$

$4\sqrt{2}\times a\times\frac{1}{\sqrt{2}} = -22$

$a = -\frac{11}{2}$

$\therefore E = \left(\frac{-11}{2}, 0\right)$ $\boxed{05}$



$\boxed{20}$

தாக்க கோட்டின் சமன்பாடு

$y - 0 = \tan 45\left(x - \left(-\frac{11}{2}\right)\right)$ $\boxed{05}$

$y = x + \frac{11}{2}$

$2y = 2x + 11$

$\Rightarrow 2x - 2y + 11 = 0$ $\boxed{05}$

மேலதிகமான இரு விசைகளுக்கு

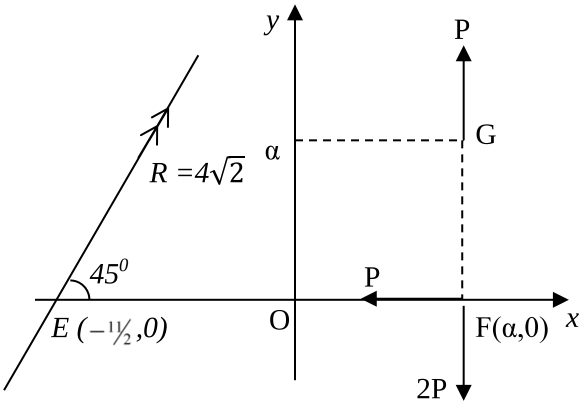
$\leftarrow x_1 = P$

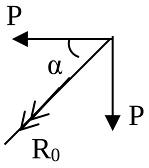
$\downarrow y_1 = 2P - P = P$ $\boxed{05}$

$R_0 = \sqrt{P^2 + P^2}$

$R_0 = \sqrt{2}P$ $\boxed{05}$

$\tan\alpha = P/P \Rightarrow \tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45$ $\boxed{05}$





$\boxed{25}$

∴ மேலதிக விசைகளின் விளையுள் $R_0 \,//\, R = 4\sqrt{2}$

இணையாயின். $R_0 = R$

$\Rightarrow \sqrt{2}P = 4\sqrt{2}$

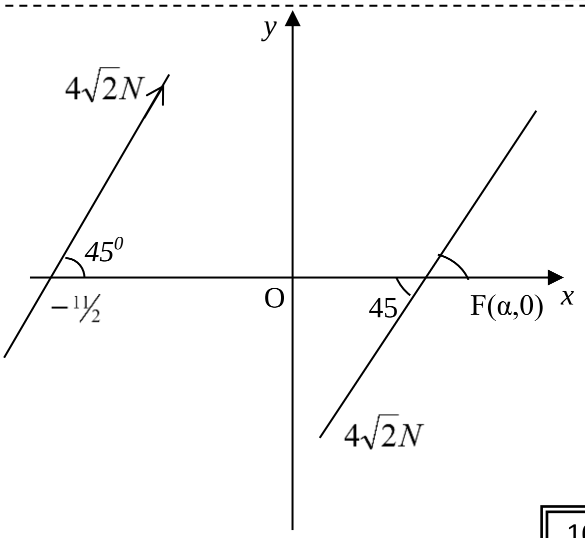
$\Rightarrow P = 4$ $\boxed{05}$

இணை $= 32\text{Nm}$ ↺

$\Rightarrow 4\sqrt{2}\times\left(\alpha + \frac{11}{2}\right)\sin 45 = 32$

$\alpha + \frac{11}{2} = 8$

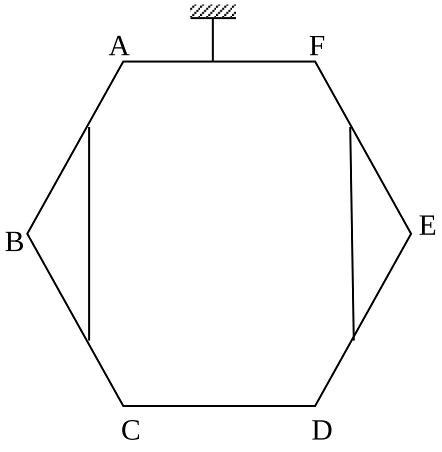
$\alpha = 5/2$ $\boxed{05}$

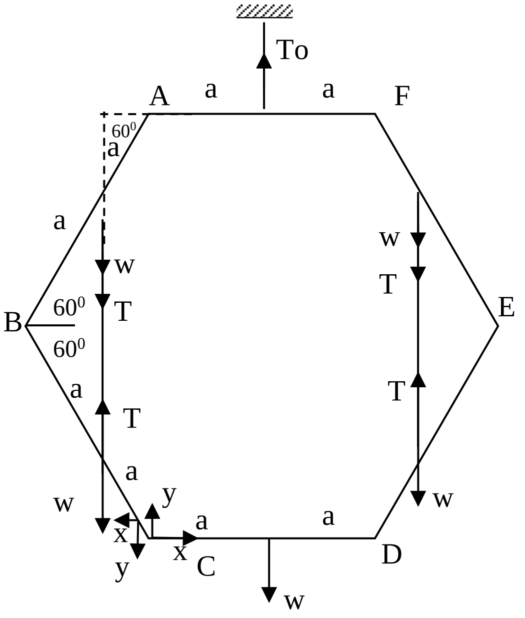


$\boxed{10}$

15)

a) ஒவ்வொன்றும் நீளம் 2a ஐயும் நிறை w ஐயும் உடைய AB,BC,CD,DE,EF ஆகிய ஆறு சீரான கோல்கள் A,B,C,D,E,F ஆகிய அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. AB,BC ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் நீளம் $\sqrt{3}a$ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்வாறே EF,DE ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளும் நீளம் $\sqrt{3}a$ ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. தொகுதி கோல் AF இன் நடுப்புள்ளியில் இருந்து ஒரு நிலைக்குத்து தளத்தில் தொங்கவிடப்பட்டு, உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு நாப்பத்தில் இருக்கிறது. இழைகளில் உள்ள இழுவை 3w எனக் காட்டி, கோல் AB இனால் கோல் AF மீது A இற் பிரயோகிக்கப்படும் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.





CD, $\circlearrowleft D$ $w \times a - Y \times 2a = 0$ $\boxed{05}$

$$Y = \frac{w}{2} \qquad \boxed{05}$$

BC, $\circlearrowleft B$ $T \times a\cos 60 - w \times a\cos 60 - y \times 2a\cos 60 - x \times 2a\sin 60 = 0$ $\boxed{10}$

$$T - 2\sqrt{3}x = 2w \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \quad \boxed{05}$$

(ABC), $\overset{\curvearrowleft}{\text{A}}$ $(w \times a\cos 60) \times 2 - x \times 4a\sin 60 = 0$ $\boxed{05}$

$$\Rightarrow x = \frac{w}{2\sqrt{3}} \qquad \boxed{05}$$

$(1) \rightarrow \; T = 3w$

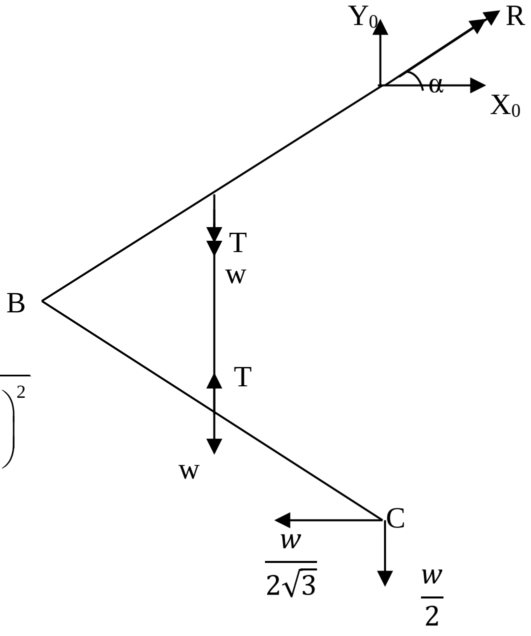
$\boxed{35}$

$$(ABC), \quad \rightarrow Xo - \frac{w}{2\sqrt{3}} = 0$$

$$Xo = \frac{w}{2\sqrt{3}} \qquad \boxed{05}$$

$$\uparrow Yo - w - w - \frac{w}{2} = 0$$

$$Yo = \frac{5w}{2} \qquad \boxed{05}$$



மறுதாக்கம் $R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{w}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{5w}{2}\right)^2}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{1}{3} + 25}\right)\frac{w}{2}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{76}{3}}\,\frac{w}{2} \qquad \boxed{05}$$

$$\tan\alpha = \frac{Yo}{Xo}$$

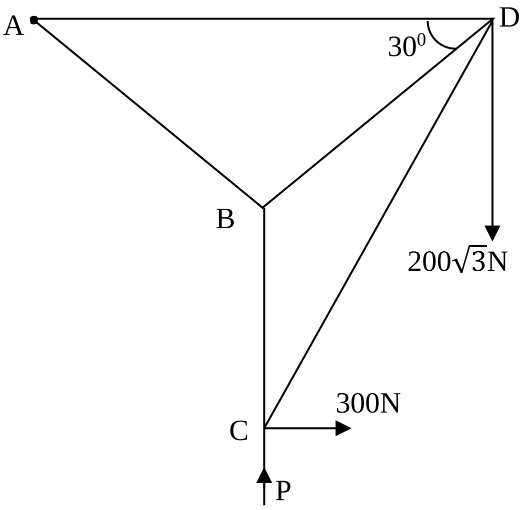
$$= \frac{5w}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{w}$$

$$\tan\alpha = \left(5\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(5\sqrt{3}\right) \qquad \boxed{05}$$

$\boxed{20}$

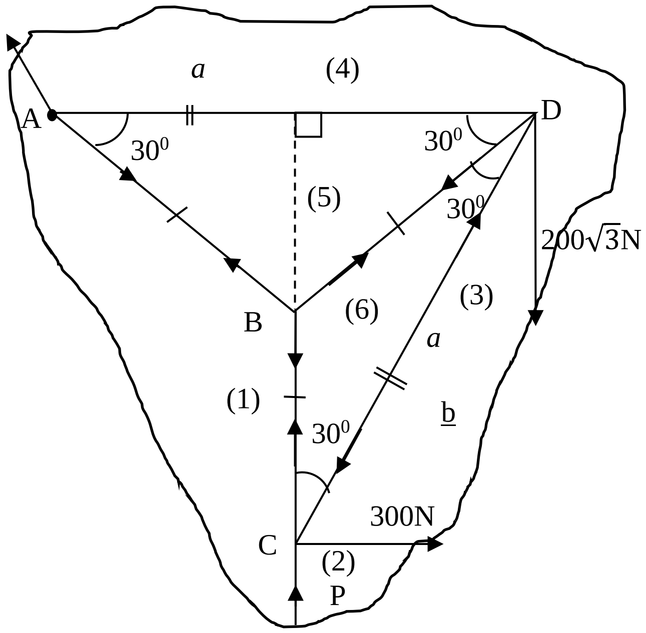
b) அருகே உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல் முனைகளில் ஒப்பமாக இணைக்கப்பட்ட AB,BC,CD,AD,BD என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களைக் கொண்டது. இங்கு $AB = BC = BD$, $AD = CD$, $\angle ADB = 30^0$ ஆகும். மூட்டு D இல் $200\sqrt{3}$ N சுமை தொங்கவிடப்பட்டும், மூட்டு C இல் 300N, P ஆகிய முறையே கிடை, நிலைக்குத்து விசைகள் பிரயோகிக்கப்படும் சட்டப்படல் A இல் நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாக பிணைக்கப்பட்டு. BC நிலைக்குத்தாகவும், AD கிடையாகவும் இருக்குமாறு ஒரு நிலைக்குத்து தளத்தில் நாப்பத்தில் உள்ளது.



(i) P இன் பெறுமானம் யாது?

(ii) போவின் குறியீடைப்பயன்படுத்தி B,C,D ஆகிய மூட்டுகளிற்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, **இதிலிருந்து** கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளை அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளாக எனக் குறிப்பிட்டு காண்க.

(iii) கோல் AD ஐ தொகுதியில் இருந்து அகற்றின் யாது நிகழும் என காரணத்துடன் கூறுக.

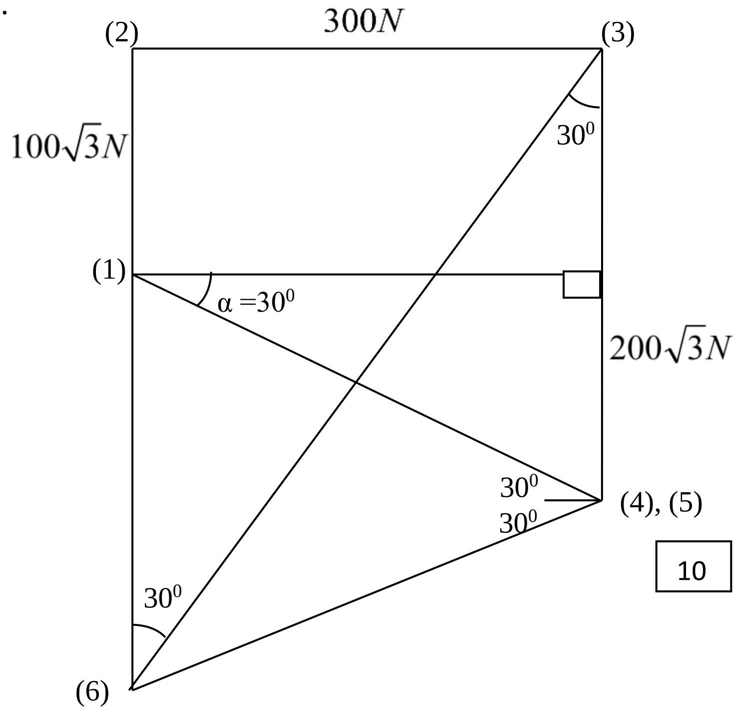


i. $\curvearrowleft A$, $P \times {}^{a}\!/_{2} + 300 \times a \sin 60 - 200\sqrt{3} \times a = 0$ $\boxed{10}$

$\Rightarrow P = 100\sqrt{3}N$ $\boxed{05}$

$\boxed{15}$

ii.



$$\tan\alpha = \frac{100\sqrt{3}}{300}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = 30^0$$

$\boxed{10}$ $\boxed{10}$ $\boxed{10}$

கோல்கள்	தகைப்பு			
	இழுவை	உதைப்பு		
AB	$200\sqrt{3}N$	-	$\boxed{05}$	$\boxed{05}$
BC	$200\sqrt{3}N$	-	$\boxed{05}$	$\boxed{05}$
CD	-	600N	$\boxed{05}$	$\boxed{05}$
BD	$200\sqrt{3}N$	-	$\boxed{05}$	$\boxed{05}$
AD	-	-	0	$\boxed{05}$

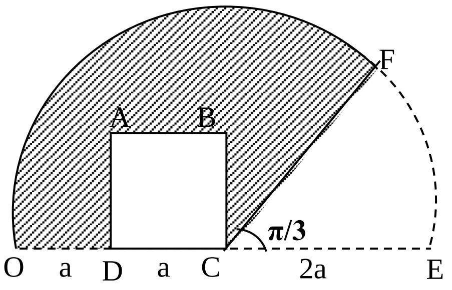
$\boxed{75}$

iii. கோல் AD இல் தகைப்பு O ஆதலால் AD ஐ நீக்கின் தொகுதியின் சமநிலையில் பாதிப்பு இல்லை. $\boxed{05}$

$\boxed{05}$

16) மையத்தில் 2α கோணத்தை எதிரமைக்கும் r ஆரையுடைய சீரான ஆரைச்சிறையின் திணிவுமையம் மையத்தில் இருந்து சமச்சீர் ஆரை வழியே $\frac{2}{3}\frac{rSin\alpha}{\alpha}$ தூரத்தில் உள்ளது என தொகையிடல் மூலம் காட்டுக.

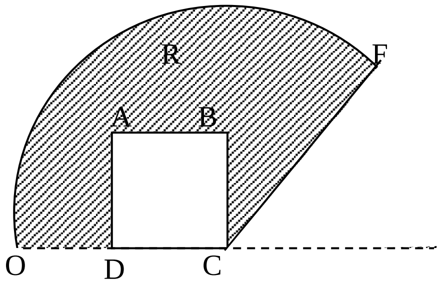
உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு 2a ஆரையுடைய சீரான அரைவட்டத்தில் இருந்து மையம் C இல் π/3 கோணத்தை எதிரமைக்கும் ஆரைசிறை ECF, a பக்கநீளம் கொண்ட சதுரம் ABCD ஆகியவற்றை நீக்கி பெறப்பட்ட மெல்லிய தகட்டு உலோகம் (R) பெறப்பட்டுள்ளது. R இன் திணிவுமையம் OE இல் இருந்து $\bar{y}$ தூரத்திலும் OE இற்கு செங்குத்தாக O வினூடான கோட்டில் இருந்து $\bar{x}$ தூரத்திலும் உள்ளது.



$\bar{x}=\lambda a$ எனவும் $\bar{y}=\frac{21}{2(4\pi-3)}a$ எனவும் காட்டுக. இங்கு

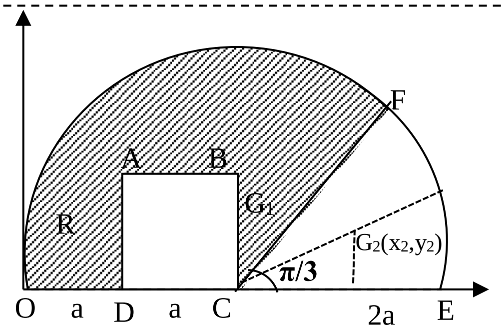
$\lambda=\frac{16\pi-(8\sqrt{3}+9)}{2(4\pi-3)}$ ஆகும்.

இப்போது தகடு R ஆனது உருவில் காட்டியவாறு அதன் தளம், நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு கிடைத்தளத்தில் மீது OC பொறுத்திருக்க வைக்கப்பட்டுள்ளது. R இன் நிறை w எனக் கொண்டு, F இல் w_0 நிறையுடைய துணிக்கை இணைக்கப்பட C பற்றி கவிழும் நிலையில் இருப்பின் $w_0=(2-\lambda)w$ எனக் காட்டுக.



தேற்றம் 30

30



½ வட்ட திணிவு $=\frac{1}{2}\pi(2a)^2\sigma,$ $\sigma-$ பரப்படர்த்தி

10

$= 2\pi a^2\sigma = 6\pi k \qquad \frac{1}{3}a^2\sigma = k$ எனும்

$$\frac{2}{3}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$\theta = \pi/_2 \Rightarrow \frac{2}{3}\times(2a)\frac{\sin \pi/_2}{\pi/_2} = \frac{8a}{3\pi} = CG_1 \quad \boxed{05}$$

ஆரைசிறை CEF இன் திணிவு $= \frac{1}{2}(2a)^2\times\left(\pi/_3\right)\sigma \quad \boxed{10}$

$$= \frac{2\pi}{3}a^2\sigma = 2\pi k$$

$$CG_2 = \frac{2}{3}\times\frac{(2a)\sin \pi/_6}{\pi/_6} = \frac{4a}{\pi} \quad \boxed{05}$$

சதுரம் ABCD திணிவு $= a\times a\sigma = a^2\sigma = 3k \quad \boxed{05}$

$x_2 = 2a + OG_2\cos \pi/_6, \qquad y_2 = OG_2\sin \pi/_6$

$$= 2a + \frac{4a}{\pi}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad = \frac{4a}{\pi}\times\frac{1}{2} = \frac{2a}{\pi} \quad \boxed{05}$$

$$= 2a + \frac{2\sqrt{3}a}{\pi}$$

$$= 2a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) \quad \boxed{10}$$

பொருள்	திணிவு	திணிவுமையம்	
½ வட்டம்	6πk	2a	$\frac{8a}{3\pi}$
ஆரைச்சிறை ECF	2 πk	$2a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)$	$\frac{2a}{\pi}$
சதுரம் ABCD	3k	$\frac{3a}{2}$	$\frac{a}{2}$
R	(4 π – 3)k	$\bar{x}$	$\bar{y}$

$\boxed{10}$

$\boxed{60}$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$\bar{x} = \frac{6\pi k\times 2a - 2\pi k\times 2a\left(1+\sqrt{3}/_\pi\right) - 3k\times\frac{3a}{2}}{(4\pi-3)k} \quad \boxed{15}$$

$$= \left(\frac{12\pi - 4\pi - 4\sqrt{3} - \frac{9}{2}}{4\pi - 3}\right)a$$

$$= \left(\frac{8\pi - 4\sqrt{3} - \frac{9}{2}}{4\pi - 3}\right)a \qquad \boxed{05}$$

$$\bar{x} = \frac{\left[16\pi - \left(8\sqrt{3} + 9\right)\right]a}{2\left(4\pi - 3\right)} = \lambda a$$

இங்கு $\lambda = \dfrac{\left[16\pi - \left(8\sqrt{3} + 9\right)\right]}{2\left(4\pi - 3\right)}$

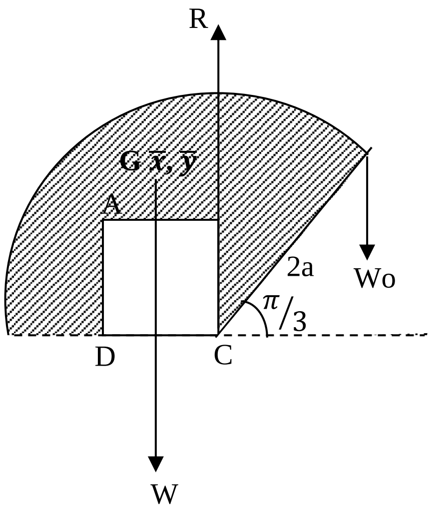
$$\bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

$$= \frac{6\pi k \times \frac{8a}{3\pi} - 2\pi k \times \frac{2a}{\pi} - 3k \times \frac{a}{2}}{\left(4\pi - 3\right)k} \qquad \boxed{15}$$

$$\bar{y} = \frac{\left(16 - 4 - {}^{3}\!/_{2}\right)a}{\left(4\pi - 3\right)} \Rightarrow \bar{y} = \frac{21}{2\left(4\pi - 3\right)}a$$

$\boxed{05}$

$\boxed{40}$



$\boxed{10}$

$$\overset{\curvearrowleft}{C} \;,\; W \times \left(2a - \bar{x}\right) = Wo \times 2a\cos{}^{\pi}\!/_{3} \qquad \boxed{10}$$

$$W \times \left(2a - \lambda a\right) = Wo \times a$$

$$Wo = \left[2 - \lambda\right]W$$

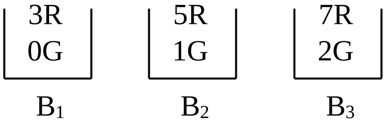
$\boxed{20}$

17)

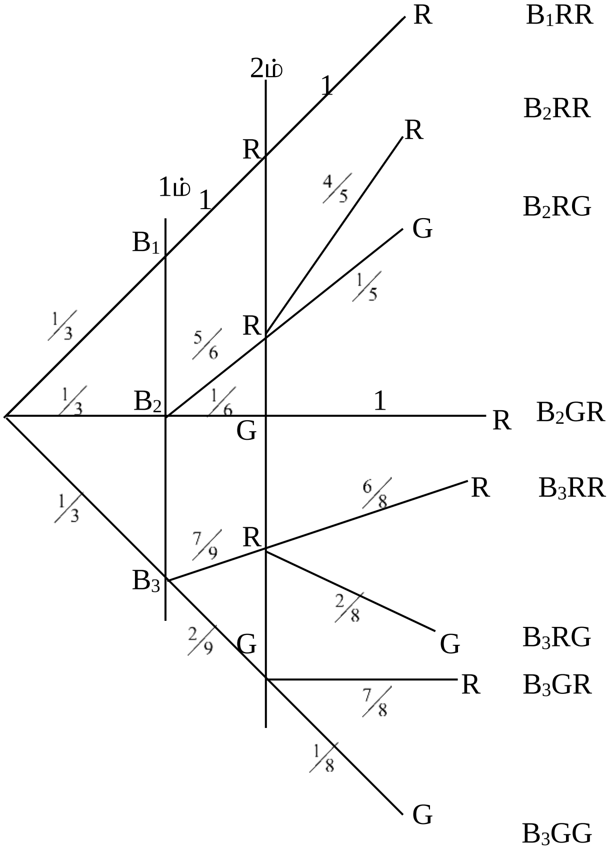
a) சர்வசமனான B_1, B_2, B_3 எனும் மூன்று பெட்டிகளில் சர்வசமனான சிவப்பு பேனாக்கள் அல்லது பச்சைப் பேனாக்கள் உள்ளன. பெட்டி B_k இல் $(2k+1)$ எண்ணிக்கையான சிவப்பு பேனாக்களும் $(k-1)$ எண்ணிக்கையான பச்சைப்பேனாக்களும் உள்ளன. இங்கு $k=1,2,3$ ஆகும். மூன்று பெட்டிகளில் ஒரு பெட்டி எழுமாறாக எடுக்கப்பட்டு அதிலிருந்து 2 பேனாக்கள் ஒன்றன் பின் ஒன்றாக **பிரதிவைப்பு இல்லாமல்** எடுக்கப்படுகின்றது. இவ் எத்தனிப்புகளிற்கான மரவரிப்படத்தை வரைந்து,

(i) வெளியே எடுக்கப்பட்ட இரண்டாவது பேனா பச்சையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) வெளியே எடுக்கப்பட்ட இரண்டாவது பேனா பச்சையாக இருப்பின் முதலாவது பேனா சிவப்பாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.



பெட்டி B_k இல் $R \rightarrow (2k+1)$, $G \rightarrow (k-1)$



20

20

(i) X = {$2^{\text{வது}}$ பேனா பச்சை(G)}

$$= \{B_2RG, B_3RG, B_3GG\}$$

$$P(X) = P(B_2RG) + P(B_3RG) + P(B_3GG)$$ 10

$$=\left(\tfrac{1}{3}\times\tfrac{5}{6}\times\tfrac{1}{5}\right)+\left(\tfrac{1}{3}\times\tfrac{7}{9}\times\tfrac{2}{8}\right)+\left(\tfrac{1}{3}\times\tfrac{2}{9}\times\tfrac{1}{8}\right) \quad \boxed{15}$$

$$=\frac{1}{18}+\frac{7}{108}+\frac{1}{108}$$

$$\Rightarrow P(X)=\frac{7}{54} \quad \boxed{05}$$

$$\boxed{30}$$

(ii) Y = { 1வது பேனா R}

$$P\left(Y/X\right)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)} \quad \boxed{10}$$

$$=\frac{P(B_2RG)+P(B_3RG)}{P(X)} \quad \boxed{05}$$

$$=\frac{\left(\tfrac{1}{3}\times\tfrac{5}{6}\times\tfrac{1}{5}\right)+\left(\tfrac{1}{3}\times\tfrac{7}{9}\times\tfrac{2}{8}\right)}{(7/54)}$$

$$=\frac{13}{108}\times\frac{54}{7}$$

$$\Rightarrow P\left(Y/X\right)=\frac{13}{14} \quad \boxed{05}$$

$$\boxed{20}$$

---

b) $\{x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n\}$, $\{y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_m\}$ எனும் தரவுத் தொடைகளிற்கு ஒரே நியமவிலகல் σ இருக்கும் அதேவேளை அவற்றின் இடைகள் முறையே $\bar{x}, \bar{y}$ ஆகும். இவை இரண்டும் சேர்ந்த தரவுத்தொடை $\{x_1, \ldots\ldots\ldots x_n, y_1, \ldots\ldots\ldots y_m\}$ இன் மாற்றறிறன் $\left\{\sigma^2+\dfrac{mn(\bar{x}-\bar{y})^2}{(m+n)^2}\right\}$ இனால் தரப்படுகிறது எனக் காட்டுக.

ஒரு பாடசாலை (A) இல் குறித்த வகுப்பிற்கு நடைபெற்ற கணிப்பீட்டு பரீட்சையில் பெற்ற புள்ளிகள் பற்றிய விபரம் கீழே அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

புள்ளிகள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0-5	20
5-10	30
10-15	40
15-20	10

இப்பரம்பலின் இடையைக் காண்க. இதன் மாறற்றிறன் 21 எனத்தரப்பட்டுள்ள இக்கணிப்பீட்டு பரீட்சை அயற்பாடசாலை (B) இல் அதே வகுப்பில் உள்ள 100 மாணவர்களிற்கு வைக்கப்பட்ட போது அவர்கள் பெற்ற புள்ளிகளின் இடையும் மாறற்றிறனும் முறையே 8.5, 21 ஆக அமைந்தது. பரீட்சைக்கு தோற்றிய இவ்விரு பாடசாலைகளினதும் மொத்த மாணவர்கள் பெற்ற இணைந்த மாற்றறிறனைக் காண்க.

$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{1=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{1=1}^{n} x_i = n\bar{x} \qquad \boxed{05}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\bar{x}\right)^2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n\left(\sigma^2 + \left(\bar{x}\right)^2\right) \qquad \boxed{05}$$

$$\boxed{05}$$

$y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_m$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = m\bar{y}\ , \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} y_i^2 = m\left(\sigma^2 + \left(\bar{y}\right)^2\right)$$

$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n, y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_m$

$$\bar{Z} = \frac{\sum x_i + \sum y_i}{n+m} \qquad \boxed{05}$$

$$= \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m}$$

நியமவிலகல் σ_Z எனின்

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum x_i^2 + \sum y_i^2}{n+m} - \left(\bar{z}\right)^2 \qquad \boxed{10}$$

$$= \frac{n\left(\sigma^2 + \left(\bar{x}\right)^2\right) + m\left(\sigma^2 + \left(\bar{y}\right)^2\right)}{n+m} - \left(\frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m}\right)^2$$

$$= \frac{(n+m)\sigma^2 + n\left(\bar{x}\right)^2 + m\left(\bar{y}\right)^2}{n+m} - \frac{\left(n\bar{x} + m\bar{y}\right)^2}{(n+m)^2}$$

$$= \sigma^2 + \frac{n\left(\bar{x}\right)^2 + m\left(\bar{y}\right)^2}{m+n} - \frac{(n\bar{x} + m\bar{y})^2}{(n+m)^2} \qquad \boxed{05}$$

$$= \sigma^2 + \frac{(m+n)(n\left(\bar{x}\right)^2 + m\left(\bar{y}\right)^2) - (n\bar{x} + m\bar{y})^2}{(m+n)^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_z^2 = \sigma^2 + \frac{mn(\bar{x} - \bar{y})^2}{(m+n)^2} \qquad \boxed{10}$$

புள்ளிகள்	f	ந. பெறுமானம் (x)	fx
0-5	20	2.5	50
5-10	30	7.5	225
10-15	40	12.5	500
15-20	10	17.5	175
	$\sum f = 100$		$\sum fx = 950$

$\boxed{05}$ $\boxed{10}$

இடை $$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$= \frac{950}{100}$$

$$\bar{x} = 9.5 \quad \boxed{05}$$

பாடசாலை A

$\bar{x} = 9.5$

$\sigma^2 = 21$

$n = 100$

பாடசாலை B

$\bar{y} = 8.5$

$\sigma^2 = 21$

$m = 100$

இணைந்த மாறற்திறன்

$$\sigma_z^2 = \sigma^2 + \frac{mn(\bar{x} - \bar{y})^2}{(m+n)^2}$$

$$= 21 + \frac{100 \times 100(9.5 - 8.5)^2}{(100+100)^2} \quad \boxed{10}$$

$$= 21 + 0.25$$

$$\sigma_z^2 = 21.25 \quad \boxed{05}$$

$\boxed{35}$